Technische Universität Berlin
Institut für Konstruktion, Mikro- und Medizintechnik
FG Konstruktionslehre

Professor Dr.-Ing. H. Mertens
Dipl.-Ing. A. Linke

SS 03

Analytische Übung zu den Vorlesungen

„Beanspruchungsgerechtes Konstruieren II“ und „Konstruktionstechnik II“

TEST 2 (12.06.03) : Volumennutzungsgrad, Sätze v. Castigliano

Name: CETIN , AYHAN Matr.: 190 357

Gesamtpunktzahl : 20 (10 Punkte erforderlich zum Bestehen des Tests)

1. **(8 Punkte)** Abb. 1 zeigt den Entwurf eines U-förmigen Rahmens, der durch die Kraft F belastet wird. Alle drei Balken besitzen den gleichen Doppel-T-Querschnitt entsprechend Abb. 2.
   a) Berechnen Sie den Flächennutzungsgrad $\eta_{A.A}$ der Balken !
   b) Skizzieren sie qualitativ die Biegemomentenverläufe in den drei Balken !
   Berechnen Sie die Volumennutzungsgrade $\eta_{A.1}$, $\eta_{A.2}$, $\eta_{A.3}$ der einzelnen drei Balken !
   Hinweis: Konnten Sie Aufgabenteil a) nicht lösen, verwenden Sie hierbei $\eta_{A.A} = ½$!
   c) Berechnen Sie den Volumennutzungsgrad $\eta_{A.ges}$ des gesamten Rahmens !
   Hinweis: Bei der Berechnung der Flächen-/Volumennutzungsgrade sind nur Biegebeanspruchungen zu berücksichtigen ! Normal- und Querkraftanteile sind zu vernachlässigen !

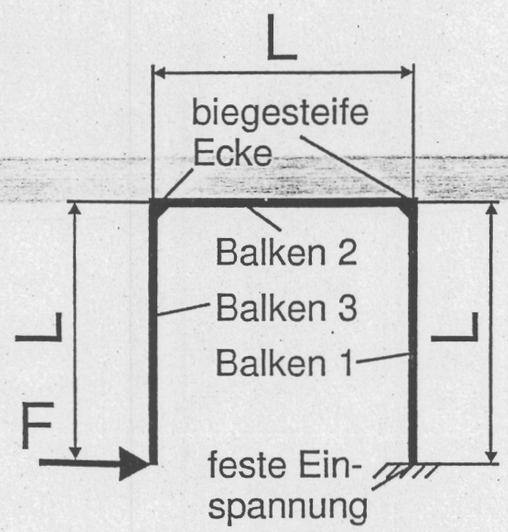


Abb. 1: Rahmen

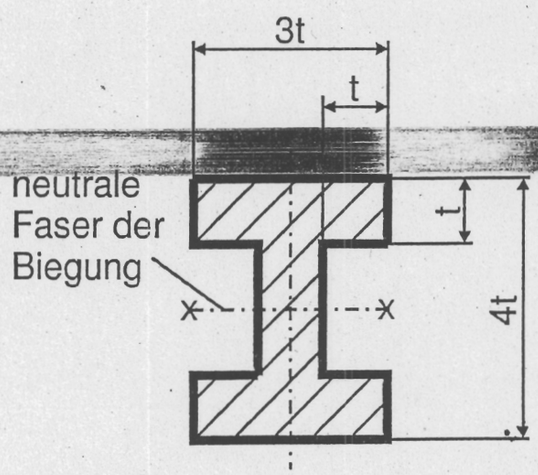


Abb. 2 : Balkenquerschnitt

2. **(12 Punkte)** Abb. 3 zeigt ein Balkensystem, das in einer festen Einspannung und einem Loslager gelagert ist.

a) Stellen Sie qualitativ das Balkensystem im verformten Zustand unter Einwirkung der Kraft F dar !

b) Bestimmen Sie alle Auflagerreaktionen und die Schnittmomentenverläufe in den beiden Balken ! Zeichnen Sie die Schnittmomentenverläufe beider Balken qualitativ !

c) Bestimmen Sie die Verdrehung der biegesteifen Ecke P !

Hinweis: Die Berechnung soll mit Hilfe der Sätze von Castigliano ohne Berücksichtigung von Zug- und Schubsteifigkeiten erfolgen !

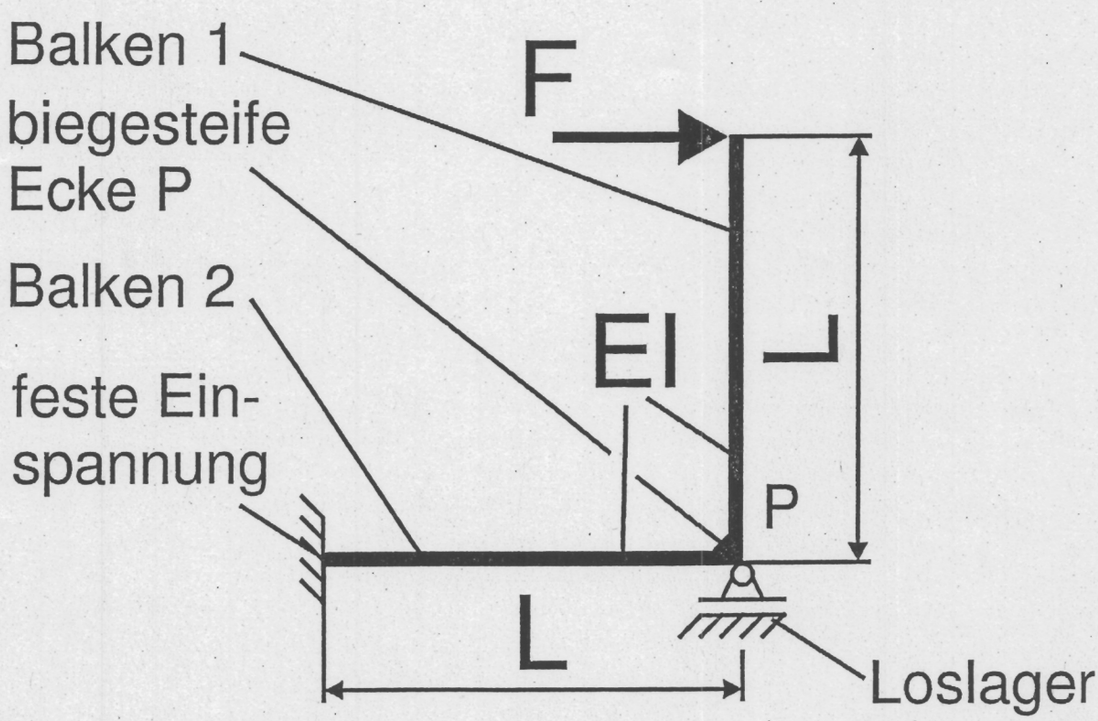


Abb. 3: Balkensystem

1. Aufgabe:

a) $\eta_{AA} = \frac{1}{A}\int_A \frac{y^2}{h^2}\,dA = \frac{1}{Ah^2}\int_A y^2\,dA = \frac{1}{Ah^2} I_b$

$I_{\square} = \frac{3t(4t)^3}{12} = 16t^4 \qquad I_{\square} = \frac{t(2t)^3}{12} = \frac{2}{12}t^4$

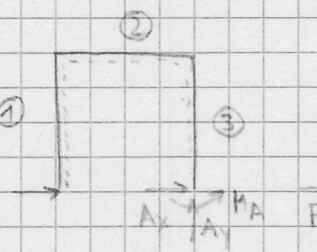
$I_b = I_{\square} - 2I_{\square} = 16t^4 - \frac{4}{3}t^4 = \frac{44}{3}t^4$

$h^2 = (2t)^2 = 4t^2$

$A = A_{\square} - 2A_{\square} = 12t^2 - 2(2t^2) = 8t^2$

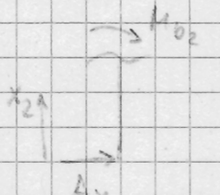
$\Rightarrow \eta_{A,A} = \frac{1}{8t^2 \cdot 4t^2} \cdot \frac{44}{3}t^4 = \frac{44}{96} = \underline{\underline{\frac{11}{24}}}$

b) $A_x = -F \qquad A_y = M_A = 0$



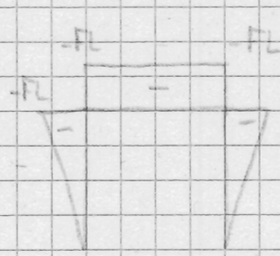
$\Sigma M \quad M_{b1} + Fx_1 = 0$

$M_{b1} = -Fx_1$



$\Sigma M \quad M_{b3} - A_x x_2 = 0$

$M_{b3} = A_x x_2 = -Fx_2$



$$n_{Ai} = n_{AA}\frac{1}{L}\int_0^L \frac{\sigma_{max i}^2(x)}{\sigma_{max i}^2}\,dx$$

$$n_{A2} = n_{AA}\cdot\frac{1}{L}\int_0^L \frac{\sigma_{max_2}^2(x)}{\sigma_{max_2}^2}\,dx = n_{AA}\frac{1}{L}\int_0^L 1\,dx = n_{A,A} = \frac{11}{24}$$

$$\eta_{A1} = \eta_{AA} \cdot \frac{1}{L} \int_0^L \frac{\left(\sigma_{max_1}(x)\right)^2}{\sigma_{max_1}} dx \qquad \sigma_{max_1}(x) = \frac{M_b(x)}{W_b}$$

$$\sigma_{max_1} = \frac{-FL}{W_b}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_{max_1}(x)}{\sigma_{max_1}} = \frac{x}{L}$$

$$\Rightarrow \eta_{A1} = \eta_{AA} \cdot \frac{1}{L} \int_0^L \frac{x^2}{L^2} dx$$

$$= \eta_{AA} \cdot \frac{1}{L^3} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^L = \frac{\eta_{AA}}{3} = \underline{\underline{\frac{11}{72}}}$$

$$\eta_{A3} = \eta_{A1} = \underline{\underline{\frac{11}{72}}}$$

c) $$\eta_{A\,ges} = \frac{V_1}{V_{ges}} \left(\frac{\sigma_{max_1}}{\sigma_{max}}\right)^2 \eta_{A1} + \frac{V_2}{V_{ges}} \left(\frac{\sigma_{max_2}}{\sigma_{max}}\right)^2 \eta_{A2} + \frac{V_3}{V_{ges}} \left(\frac{\sigma_{max_3}}{\sigma_{max}}\right)^2 \eta_{A3}$$

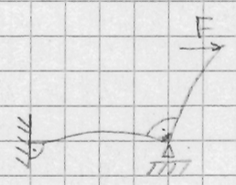
$$= \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{11}{72} + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{11}{24} + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{11}{72}$$

$$= \frac{2}{3}\frac{11}{72} + \frac{1}{3}\frac{11}{24} = \frac{22}{216} + \frac{33}{216} = \underline{\underline{\frac{55}{216}}} \approx 0{,}25$$

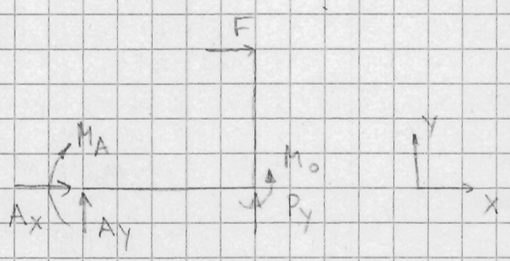
2. BEKO Tut

2. Aufgabe:

a)



b)



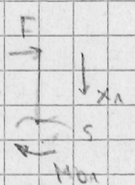
ΣF_x: $A_x + F = 0$ $\quad A_x = -F$

ΣF_y: $A_y + P_y = 0$ $\quad A_y = -P_y$

ΣM^A: $-FL - M_A + M_0 + P_y L = 0 \Rightarrow M_A = P_y L - FL + M_0$

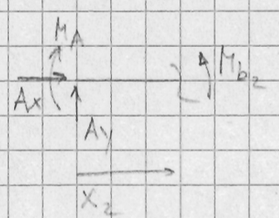
Schnittlasten

Bereich 1



ΣM^S: $\quad M_{b1} + Fx_1 = 0 \quad M_{b1} = -Fx_1$

Bereich 2



ΣM^S: $\quad M_{b_2} - M_A - A_y \cdot x_2 = 0$

$M_{b_2} = M_A + A_y x_2$

$= P_y L - FL + M_0 - P_y x_2$

nach Castigliano: $u_{0,y} = \left.\frac{\partial W}{\partial P_y}\right|_{M_0=0} = 0$

$W = \int_0^L \frac{M_{b1}^2}{2EI}\, dx_1 + \int_0^L \frac{M_{b2}^2}{2EI}\, dx$

$$\frac{\partial M_{b1}^2}{\partial P_y} = 0 \qquad \frac{\partial M_{b2}^2}{\partial P_y} = 2M_{b2} \cdot \frac{\partial M_{b2}}{\partial P_y} = 2(P_y L + FL - P_y x_2)\cdot(L - x_2)$$

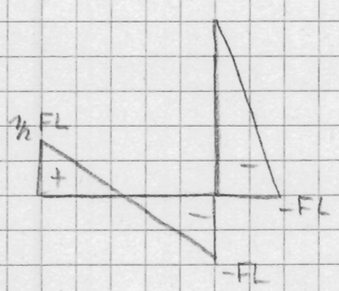
$M_0 = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial W}{\partial P_y} = \frac{1}{EI}\int_0^L P_y L^2 - FL^2 - P_y L x_2 - P_y L x_2 + FLx_2 + P_y x_2^2\, dx$$

$$= \frac{1}{EI}\left[P_y L^3 - FL^3 - \frac{P_y}{2}L^3 - \frac{P_y}{2}L^3 + \frac{F}{2}L^3 + \frac{P_y}{3}L^3\right]$$

$$= \frac{1}{EI}\left(\frac{P_y}{3}L^3 - \frac{F}{2}L^3\right) \doteq 0 \Rightarrow \underline{\underline{P_y = \frac{3}{2}F}}$$

$$\Rightarrow A_y = -\frac{3}{2}F \qquad M_A = \frac{3}{2}FL - FL = \frac{1}{2}FL$$



$$\Rightarrow M_{b2} = \frac{3}{2}FL - FL + M_0 - \frac{3}{2}Fx_2$$

$$= \frac{1}{2}FL + M_0 - \frac{3}{2}Fx_2$$

c) $$\alpha = \frac{\partial W}{\partial M_0}\Big|_{M_0=0}$$

$$\frac{\partial M_{b1}^2}{\partial M_0} = 0 \qquad \frac{\partial M_{b2}^2}{\partial M_0} = 2\left(\frac{1}{2}FL + M_0 - \frac{3}{2}Fx_2\right)\cdot 1$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2EI}\int_0^L FL + 2M_0 - 3Fx_2\, dx_2$$

$$= \frac{1}{2EI}\left(FL^2 + 2M_0 L - \frac{3}{2}FL^2\right)$$

$$= \frac{1}{2EI}\left(-\frac{1}{2}FL^2\right) = \underline{\underline{\frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{4}FL^2\right)}}$$

$M_0 = 0$

Technische Universität Berlin
Institut für Konstruktion, Mikro- und
Medizintechnik - Konstruktionslehre

Professor Dr.-Ing. H. Mertens
Dipl.-Ing. B. Kloss

SS 04

Analytische Übung zu den Vorlesungen

„Beanspruchungsgerechtes Konstruieren II“ und „Konstruktionstechnik II“

Name: Matr. Nr.:

Name: Matr. Nr.:

Übung Nr.: 7

Thema: Berechnung rotierender Scheiben

Ausgabe: **09.06.04** Abgabe: **24.06.04 zu Beginn der Übung**

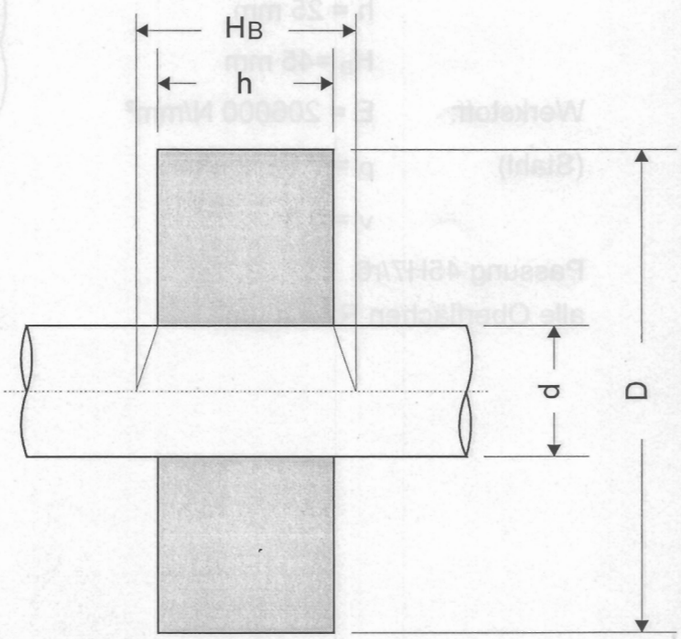
Aufgabe 7.1

Das dargestellte Schwungrad besteht aus einer Vollwelle mit aufgepreßter Scheibe. Zur Auslegung dieses Querpreßverbandes sind folgende Berechnungen durchzuführen:

a) Berechnen Sie die maximale Flächenpressung .

b) Berechnen Sie die Abhebedrehzahl.

c) Bestimmen Sie das maximal übertragbare Drehmoment bei n = 1500 min^{-1}.



Gegeben:

Geometrie d = 800 mm

(Übermaß U = 1,3 mm)

D = 2500 mm

h = 300 mm

Werkstoff: Stahl

E = 210000 N/mm^2

ν = 0,3

Dichte ρ = 7,86 kg/dm^3

Haftbeiwert μ = 0,14

Rauhtiefe R_z = 4 μm

Sicherheit gegen Durchrutschen S_R = 2,5

Aufgabe 7.2 (*)

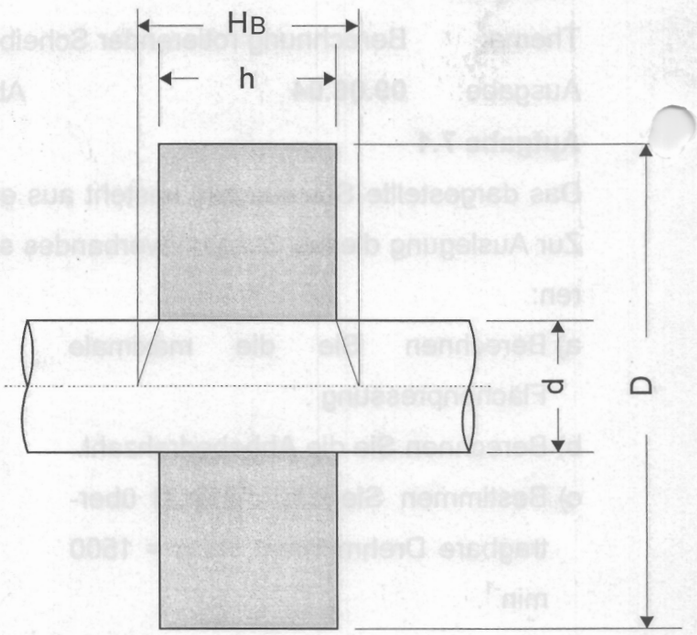
Alternativ zu dem konventionellen Vorgehen kann die Auslegung von Querpreßverbänden auch mit Hilfe von Übertragungsmatrizen durchgeführt werden. Für das dargestellte Schwungrad, bestehend aus einer Welle mit aufgepreßter Scheibe, sollen die Radialverschiebungen und Radialspannungen

a) in der Wellenmitte,

b) im Fügebereich und

c) am Außenrand der Nabe

bei maximalem Übermaß U_g bestimmt werden.



<u>Gegeben:</u>

Drehzahl	$n = 1400\ min^{-1}$	
Geometrie	$d = 45$ mm	
	$D = 230$ mm	
	$h = 25$ mm	
	$H_B = 45$ mm	
Werkstoff:	$E = 206000\ N/mm^2$	
(Stahl)	$\rho = 7{,}86\ kg/dm^3$	
	$\nu = 0{,}3$	

Passung 45H7/r6

alle Oberflächen Rz = 4 µm

aus Elektro-Hütte 7

2.4.3.1.1 Übertragungsmatrizen [47]. Ein beliebiges Scheibenelement (r_1 Innenradius, r_2 Außenradius, h Scheibendicke) (Bild 2.4-29) wird am Radius r_1 mit der Kraft pro

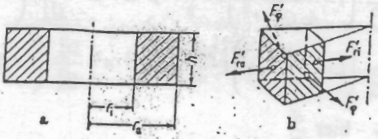


Bild 2.4-29. Scheibenelement. a) Querschnitt, b) Kräfte.

Längeneinheit $F'_{r1} = \sigma_{r1}h$ und am Radius r_2 mit der Kraft pro Längeneinheit $F'_{r2} = \sigma_{r2}h$ zusätzlich zur Eigenfliehkraft (Winkelgeschwindigkeit ω, Dichte ϱ) belastet. Das Material wird noch durch die Umfangskraft $F'_\varphi = \sigma_\varphi h$ beansprucht. Es liegt nahe, die Spannungen σ_r, σ_φ und die Radialverschiebungen v_r am Elementaußenrand durch die Innenrandwerte zu beschreiben. Man bildet folgenden erweiterten Zustandsvektor

$$\tilde{z} = (F'_r, v_r, 1), \tag{2.4-62}$$

dabei ist für den Innenrand $\tilde{z}_1 = (F'_{r1}, v_{r1}, 1) = (F'_r, v_r, 1)_1$ und für den Außenrand $\tilde{z}_2 = (F'_{r2}, v_{r2}, 1) = (F'_r, v_r, 1)_2$; $\tilde{z}$ ist die Transponierte von z (DIN 5486).

Mit der Übertragungsmatrix U wird der Zusammenhang zwischen Innen- und Außenrand des Elements hergestellt:

$$z_2 = Uz_1, \tag{2.4-63}$$

worin

$$U = \begin{array}{|c|c|c|} \hline u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ \hline u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \tag{2.4-64}$$

$$\left.\begin{aligned} u_{11} &= 1 - (1 - \nu)(1 - k^2)/2; \\ u_{12} &= E h(1 - k^2)/(2r_1); \\ u_{13} &= -(\varrho h \omega^2 r_2^3)[1 + \nu + (1 - \nu)(1 + k^2)/2](1 - k^2)/4; \\ u_{21} &= (1 - \nu^2)(1 - k^2) r_2/(2E h); \\ u_{22} &= [1 - (1 + \nu)(1 - k^2)/2]/k; \\ u_{23} &= -(\varrho \omega^2 r_2^3)(1 - \nu^2)(1 - k^2)^2/(8E). \end{aligned}\right\} \tag{2.4-65}$$

mit $k = r_1/r_2$, E Elastizitätsmodul, ν Querdehnzahl.

Die Umfangsspannung wird nach dem Hookeschen Gesetz berechnet: $\sigma_\varphi = \nu\sigma_r + E \cdot v_r/r$.

Die Übertragungsmatrix wird für jedes Element getrennt ermittelt. Werden an der Übergangsstelle von ersten Element zum nächsten keine zusätzlichen Kräfte eingeleitet und liegt keine Schrumpfverbindung vor, dann ist der Zustandsvektor am Außenrand des ersten Elements z_{21} gleich dem Zustandsvektor am Innenrand des zweiten Elements z_{12}. Der Zustandsvektor am Außenrand des zweiten Elements errechnet sich dann zu

$$z_{22} = U_2 z_{12} = U_2 U_1 z_{11} = U_{21} z_{11}. \tag{2.4-66}$$

Durch Matrizenmultiplikation von U_2 mit U_1 ergibt sich eine umfassendere Übertragungsmatrix U_{21}. Dieser Prozeß kann beliebig oft fortgesetzt werden. Dies führt schließlich zu einer sog. *Gesamtübertragungsmatrix*. Mit dieser wird der Zustand am Innenrand des Scheibenrades mit dem am Außenrand verknüpft; die endgültige Lösung wird durch die äußeren Randbedingungen festgelegt, z. B. durch Vorgabe eines spannungsfreien Innenrandes, während am Außenrand die Fliehkraft der Pole (rechnerisch durch Angaben von σ_{r2}) gegeben sei. Mit der Gesamtübertragungsmatrix können dann die restlichen zwei Unbekannten der Zustandsvektoren ermittelt werden, hier z. B. die Radialverschiebungen am Innen- und Außenrand.

Außenteil (Nabe)

$$\sigma_{rA}(r) = p \cdot \frac{Q_A^2}{1-Q_A^2} \cdot \left(1 - \frac{D_F^2}{4 \cdot Q_A^2 \cdot r^2}\right) + \frac{3+\nu}{8} \cdot \rho \cdot \pi^2 \cdot n^2 \cdot \frac{D_F^2}{Q_A^2} \cdot \left(1 + Q_A^2 - \frac{D_F^2}{4 \cdot r^2} - \frac{4 \cdot Q_A^2 \cdot r^2}{D_F^2}\right)$$

$$\sigma_{\varphi A}(r) = p \cdot \frac{Q_A^2}{1-Q_A^2} \cdot \left(1 + \frac{D_F^2}{4 \cdot Q_A^2 \cdot r^2}\right) + \frac{3+\nu}{8} \cdot \rho \cdot \pi^2 \cdot n^2 \cdot \frac{D_F^2}{Q_A^2} \cdot \left(1 + Q_A^2 + \frac{D_F^2}{4 \cdot r^2} - \frac{1+3\nu}{3+\nu} \cdot \frac{4 \cdot Q_A^2 \cdot r^2}{D_F^2}\right) \text{mit}$$

$$Q_A = \frac{D_{iA}}{D_{aA}} \approx \frac{D_F}{D_{aA}} \quad \text{hier } \frac{d}{D}$$

Innenteil

$$\sigma_{rI}(r) = -p + \frac{3+\nu}{8} \cdot \rho \cdot \pi^2 \cdot n^2 \cdot D_F^2 \cdot \left(1 - \frac{4 \cdot r^2}{D_F^2}\right)$$

$$\sigma_{\varphi I}(r) = -p + \frac{3+\nu}{8} \cdot \rho \cdot \pi^2 \cdot n^2 \cdot D_F^2 \cdot \left(1 - \frac{1+3\nu}{3+\nu} \cdot \frac{4 \cdot r^2}{D_F^2}\right)$$

in der Fuge $\left(r = \frac{D_F}{2}\right)$

$$\sigma_{rIA} = -p$$

$$\sigma_{\varphi IA} = p \cdot \frac{1+Q_A^2}{1-Q_A^2} + \frac{\pi^2}{4} \cdot \rho \cdot n^2 \cdot \frac{D_F^2}{Q_A^2}\left[(3+\nu) + (1-\nu) \cdot Q_A^2\right]$$

$$\sigma_{rAI} = -p$$

$$\sigma_{\varphi AI} = -p + \frac{\pi^2}{4} \cdot \rho \cdot n^2 \cdot D_F^2 \cdot (1-\nu)$$

Verschiebungen:

$$v_r = \frac{r}{E} \cdot (\sigma_\varphi - \nu \sigma_r)$$

in der Fuge

$$\begin{cases} v_{rIA} = \frac{D_E}{2E} \cdot p \cdot \left(\frac{1+Q_A^2}{1-Q_A^2} + \nu\right) + \frac{D_E}{2E} \cdot \frac{\pi^2}{4} \cdot \rho \cdot n^2 \cdot \frac{D_F^2}{Q_A^2} \cdot \left[(3+\nu) + (1-\nu) \cdot Q_A^2\right] \\ v_{rAI} = -\frac{D_F}{2E}(1-\nu) \cdot p + \frac{D_F}{2E}(1-\nu) \cdot \frac{\pi^2}{4} \cdot \rho \cdot n^2 \cdot D_F^2 \end{cases}$$

$$p_W = e_{iA} - e_{aI} = 2v_{rIA} - 2v_{rAI}$$

$$p_W = \frac{D_F}{E} \cdot \left[p \cdot \left(\frac{1+Q_A^2}{1-Q_A^2} + \nu + 1 - \nu\right) + \frac{\pi^2}{4} \cdot \rho \cdot n^2 \cdot D_F^2 \cdot \left(\frac{3+\nu}{Q_A^2} + (1-\nu) - (1-\nu)\right)\right]$$

bezogenes wirksames Übermaß

$$\xi_W = \frac{p_W}{D_F} = \frac{1}{E} \cdot \left[p \cdot \frac{2}{1-Q_A^2} + \frac{\pi^2}{4} \cdot \rho \cdot n^2 \cdot \frac{D_F^2}{Q_A^2} \cdot (3+\nu)\right]$$

$$\rightarrow p = (1-Q_A^2) \cdot \left[\frac{E \cdot \xi_W}{2} - \frac{\pi^2}{8} \cdot \rho \cdot n^2 \cdot \frac{D_F^2}{Q_A^2} \cdot (3+\nu)\right]$$

Fügen: n=0 $p \rightarrow p_F$

$$p_F = \frac{E \cdot \xi_W}{2}(1-Q_A^2) \quad = \text{max. Flächenpressung}$$

Abhebedrehzahl: p=0 $n \rightarrow n^*$

$$\frac{E \cdot \xi_W}{2} = \frac{\pi^2}{8} \cdot \rho \cdot n^{*2} \cdot \frac{D_F^2}{Q_A^2} \cdot (3+\nu)$$

$$\rightarrow n^* = \sqrt{\frac{4 \cdot E \cdot \xi_W \cdot Q_A^2}{\pi^2 \cdot \rho \cdot D_F^2 \cdot (3+\nu)}} = \frac{2 \cdot Q_A}{\pi \cdot D_F} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot \xi_W}{\rho \cdot (3+\nu)}}$$

10.06.04

Scheibentheorie

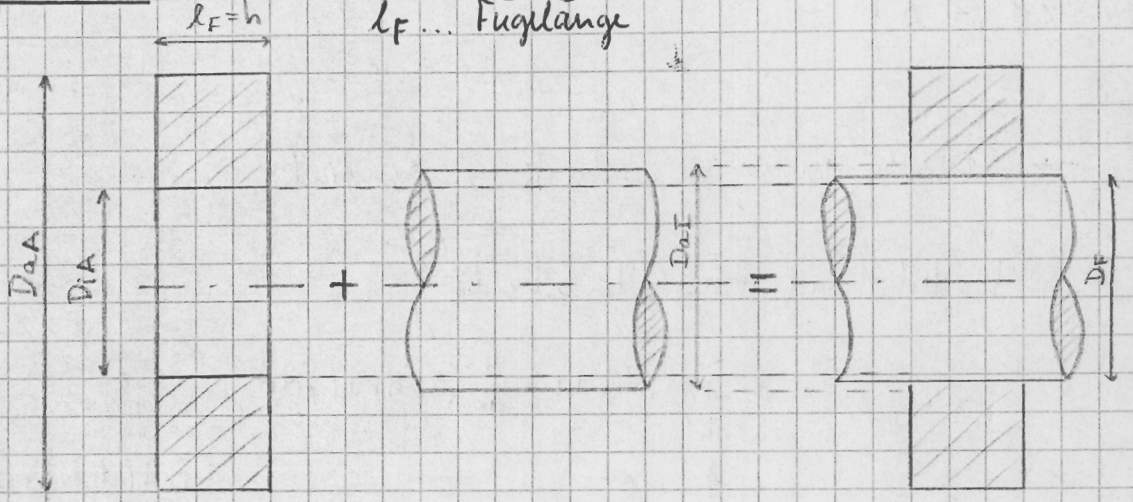
Berechnung rotierender Scheiben

- Querpressverbindungen

Grundstudium: nur Anwendung

Jetzt: Herleitung & Fügekraft

Aufgabe 7.1



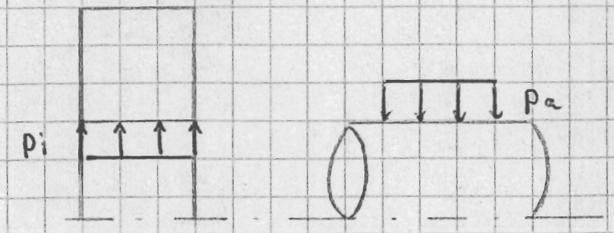
Innenteil I: Welle i... innen (ø)

Außenteil A: Nabe a... außen (ø)

Vor dem Fügen: $D_{aI} > D_{iA}$

Nach dem Fügen: D_F

Freischnitt nach dem Fügen:



ESZ ($\sigma_z = 0$)

2 Wellen

Wirksames Übermaß P_W

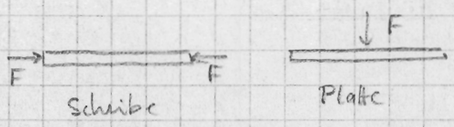
$$P_W = P - (R_{P1} + R_{P2}) = P - 0{,}8\,(R_{z,A} + R_{z,I})$$

R_{P1}, R_{P2}: Glättungstiefen

da me 2 oder ist es 2 · 0,4 = 0,8 Vergleich VL

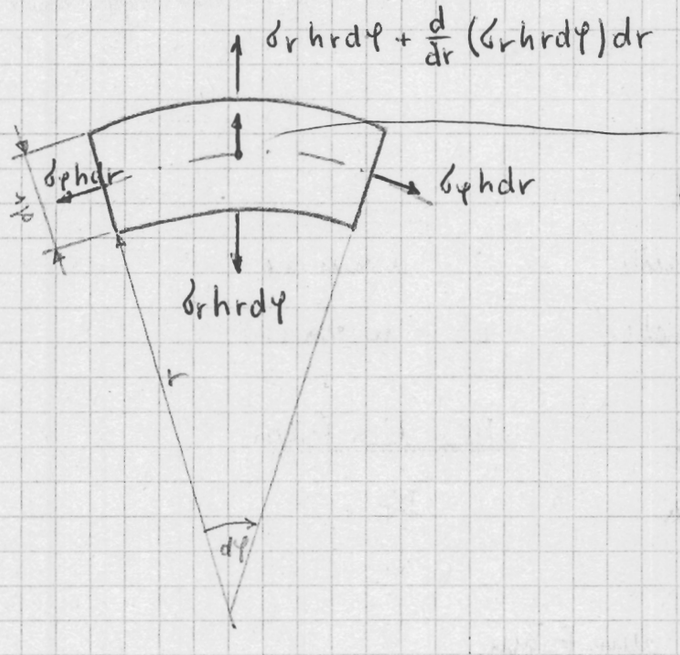
P: geometr. Übermaß = nach Zeichnung = Übermaß vor dem Fügen

$\Delta d_{eff} = \Delta d - \ldots$



→ Scheiben unter Innendruck / Außendruck

Wiederholung rotierende Scheibe:



$g\,(r d\varphi dr h)\, r\omega^2$

Fliehkraft

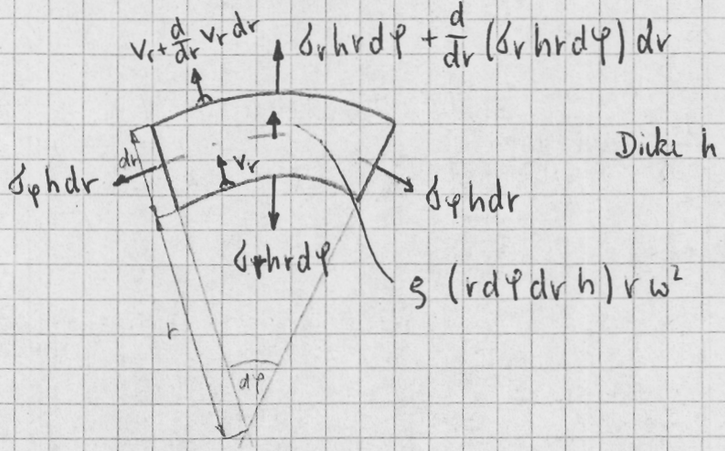
nur 1. Glied $(r + \frac{dr}{2})$ └ vernachlässigen

<u>3 Grundgleichungen</u>:

1. Gleichgewichtsbedingungen
2. Stoffgesetz
3. Verschiebungs-Verzerrungs-Relation (VVR)

17.06.04

Rotierende Scheibe



3 Grundgleichungen: (GGW, VVR, St. Gesetz)

- Radiales Kraftgleichgewicht:

nach VL 24.05.04

$$0 = \frac{d}{dr}(\sigma_r h r) + \varrho r^2 \omega^2 h - \sigma_\varphi \cdot h$$

↑ stationärer Zustand
$dh/dt = 0$

- VVR:

$$\varepsilon_r = \frac{\frac{d}{dr} v_r dr}{dr} = \frac{d}{dr} v_r \qquad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{(r + v_r) d\varphi - r d\varphi}{r d\varphi} = \frac{v_r}{r}$$

- Stoffgesetz: (Hooke, ESZ)

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu \sigma_\varphi)$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{E}(\sigma_\varphi - \nu \sigma_r)$$

BRUNNEN
Papier und viel mehr.

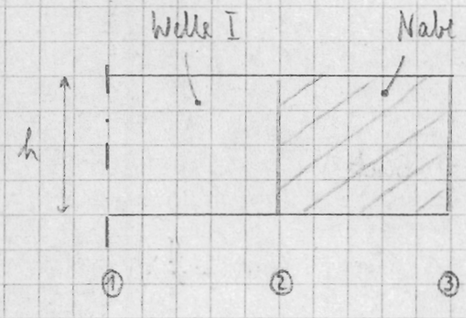
Lösung der DGLS liefert:

$$\sigma_r = A - \frac{B}{r^2} - \frac{3+\nu}{8}\rho r^2\omega^2$$

$$\sigma_\varphi = A + \frac{B}{r^2} - \frac{1+3\nu}{8}\rho r^2\omega^2$$

$$v_r = \frac{r}{E}\left(\sigma_\varphi - \nu\sigma_r\right)$$

} 2 Unbekannte A, B
⇒ 2 RB! (pro Scheibe)
↑
darauf kommt es in Prüfung an



- Vernachlässigung des axialen Wellenüberstandes
- mittleres Tragverhalten (ESZ)

③ $\sigma_{raA} = 0$ (4)

① $v_{riI} = 0$ $[\sigma_r = \sigma_\varphi]$ (1)

② $v_{riA} - v_{raI} = \frac{\Delta d_{eff}}{2}$ (3)

② $\sigma_{raI} \cdot h = \sigma_{riA} \cdot h = p_F$ (2)
└ Fugendruck

$\sigma_r = \sigma_\varphi$ wieso?

Einsetzen der RB ⇒ A_I, B_I, A_A, B_A

aus (1) $[\sigma_{riI} = \sigma_{\varphi iI}]$ ⇒ $B_I = 0$

⋮

„Aus den anderen RB folgt nach einigen Umformen:"

$$\sigma_{rA}(r) = p_F \frac{Q_A^2}{1-Q_A^2}\left(1 - \frac{D_F^2}{4Q_A^2 r^2}\right) + \frac{3+\nu}{8}\rho\bar{u}^2 n^2 \frac{D_F^2}{Q_A^2} \cdot \left(1 + \frac{Q_A^2}{1}\right) \cdot \left(1 - \frac{D_F^2}{4r^2} - \frac{4Q_A^2 r^2}{D_F^2}\right)$$

Q_A ... Durchmesserverhältnis $Q_A = \frac{D_{iA}}{D_{aA}} \approx \frac{D_F}{D_{aA}}$
└ Nabe

$$\sigma_{\varphi A}(r) = p_F \frac{Q_A^2}{1-Q_A^2}\left(1+\frac{D_F^2}{4Q_A^2 r^2}\right) + \frac{3+\nu}{8}\,\varrho\,\pi^2 n^2 \frac{D_F^2}{Q_A^2} \cdot$$

$$\cdot\left(1+Q_A^2+\frac{D_F^2}{4r^2}-\frac{1+3\nu}{3+\nu}\,\frac{4Q_A^2 r^2}{D_F^2}\right)$$

Für das Innenteil: Gleichungen auch auf kleinem Blatt

$$\sigma_{rI}(r) = -p_F + \frac{3+\nu}{8}\,\varrho\,\pi^2 n^2 D_F^2\left(1-\frac{4r^2}{D_F^2}\right)$$

$$\sigma_{\varphi I}(r) = -p_F + \frac{3+\nu}{8}\,\varrho\,\pi^2 n^2 D_F^2\left(1-\frac{1+3\nu}{3+\nu}\,\frac{4r^2}{D_F^2}\right)$$

- Ist $n = 0 \Rightarrow \sigma_r = \sigma_\varphi \neq f(r)$ (2D-Hydrostat. Spannungszustand)
  "Ebener hydrostatischer Spannungszustand"
- $\sigma_{\varphi I} \neq f(r)$ ohne Fliehkraft

Allgemein:

σ = f (Fugendruck, Fliehkraft) und natürlich der Geometrie

Plausibilitätskontrolle:

1. Einheitencheck
2. Numerische Punkte untersuchen (z.B. RB)

z.B. in der Fuge:

$$\sigma_{rA}\left(r=\frac{D_F}{2}\right) = \sigma_{riA} = p_F \Rightarrow \checkmark \text{ Logo}$$

$$\sigma_{\varphi iA} = p_F \frac{1+Q_A^2}{1-Q_A^2} + \frac{\pi^2}{4}\varrho n^2 \frac{D_F^2}{Q_A^2}\left[(3+\nu)+(1-\nu)Q_A^2\right] \quad (6)$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{raI} &= -p_F \\ \sigma_{\varphi aI} &= -p_F + \frac{\pi^2}{4}\varrho n^2 D_F^2 (1-\nu) \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

BRUNNEN
Papier und viel mehr.

Verschiebungen:

$$v_r = \frac{r}{E}\left(\sigma_\varphi - \nu\,\sigma_r\right)$$

in der Fuge:

$$v_{riA} = \underbrace{\frac{D_F}{2E}\,p_F\left(\frac{1+Q_A^2}{1-Q_A^2}+\nu\right)}_{\text{radiale Aufweitung infolge Fugendruck}} + \underbrace{\frac{D_F}{2E}\,\frac{\pi^2}{4}\,s n^2\,\frac{D_F^2}{Q_A^2}\left[(3+\nu)+(1-\nu)\,Q_A^2\right]}_{\text{radiale Aufweitung infolge Fliehkraft}} \qquad (8)$$

v_{raE} = nicht Extrablatt

RB: $\frac{\Delta d_{eff}}{2} = v_{riA} - v_{raE}$

darin (8) eingesetzt:

$$\frac{\Delta d_{eff}}{2} = \frac{D_F}{E}\left[p_F\left(\frac{1+Q_A^2}{1-Q_A^2}+\nu+1-\nu\right)+\frac{\pi^2}{4}\,s n^2\,D_F^2\left(\frac{3+\nu}{Q_A^2}+(1-\nu)-(1-\nu)\right)\right]$$

Bezogenes wirksames Übermaß:

$$\xi_w = \frac{\Delta d_{eff}}{D_F} = \text{nicht Extrablatt}$$

$$p_F = (1-Q_A^2)\left[\frac{E\,\xi_w}{2} \ominus \frac{\pi^2}{8}\,s n^2\,\frac{D_F^2}{Q_A^2}\,(3+\nu)\right] \qquad (9)$$

⊖ Fliehkraft baut Fugendruck ab!

Fügen: $n = 0$

$$p_F = E\,\frac{\xi_w}{2}\left(1-Q_A^2\right) = \text{max. Flächenpressung} \qquad (10)$$

Abhebedrehzahl: $n^* \Leftrightarrow p_F = 0$

$$n^* = \frac{2Q_A}{\pi D_F}\cdot\sqrt{\frac{E\,\xi_w}{s(3+\nu)}} \qquad (11)$$

Aufgabe 7.1

a) gesucht: $p_{F,max}$

$$\varepsilon_w = \frac{\Delta d_{eff}}{D_F} = \frac{1{,}294\ mm}{800\ mm} \qquad \Delta d_{eff} = \Delta d - 0{,}8(R_{zA} + R_{zI}) = 1{,}294\ mm$$

$$= 1{,}62\ ‰ = 1{,}62 \cdot 10^{-3}$$

$$Q_A = \frac{D_F}{D_{aA}} = \frac{800\ mm}{2500\ mm} = 0{,}32$$

$\Rightarrow$ mit (10) $p_F = 152{,}3\ MPA$

b) Abhebedrehzahl n^*

$\rightarrow$ mit (11) $n^* = 29{,}1\ \frac{1}{s} = 1748\ \frac{1}{min}$

c) ges: $M_{t,max}$ (1500 U/min)

p_F (1500 U/min) $= 40{,}2\ \frac{N}{mm^2}$

Übertragbare F_t:

$$F_t = \mu \frac{F_r}{S_R} = \mu \frac{p \cdot \pi \cdot D_F \cdot l_F}{S_R}$$

$$M_t = F_t \cdot \frac{D_F}{2} = \underline{\underline{679\ kNm}}$$

Zur Hausaufgabe:

Übertragungsmatrizen:

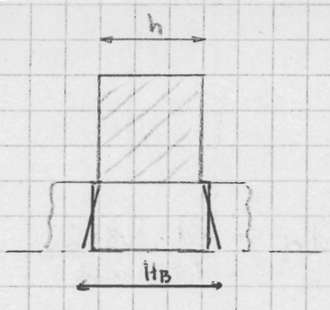
$$\underline{z}_{n,a} = \underline{\underline{U}}_{ges} \cdot \underline{z}_{1,i} \qquad \underline{z} = \begin{Bmatrix} \delta_r h \\ v_r \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$\underline{z}_{1,i}$: Zustandsvektor

a... Außenrand, i... Innenrand
n... ter Teilsystem, 1... Teilsystem

$$\underline{\underline{U}}_{ges} = \prod_{i=1}^{n} \underline{\underline{U}}_i = \underline{\underline{U}}_n \underline{\underline{U}}_{n-1} \cdots \underline{\underline{U}}_1$$

BRUNNEN FH
Papier und viel mehr.



"Birgukegel"

$h_{welle} \triangleq$ mittl. Breite

$$\sigma_{riA}\, h = \sigma_{rat}\, \frac{\overbrace{h+H_B}}{2}$$

Modellierung als 3 Teilsysteme:

$\underline{\underline{U}}_1$: Vollwelle : RB für Vollwelle in $\sigma_r = \dots$

$\underline{\underline{U}}_2$: Schrumpfsitz : nach BK II VL

$\underline{\underline{U}}_3$: Nabe (rotierender Ring) → Übertragungsmatrix nach Hülle

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ v_r \\ 1 \end{Bmatrix}_h = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{d\rho\omega^2 h}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{U}}_2} \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ v_r \\ 1 \end{Bmatrix}_{\frac{h+H_B}{2}}$$

5. Hausaufgabe Beanspruchungsgerechtes Konstruieren II
Thema: Berechnung rotierender Scheiben

David Bieniek
Mat.Nr.: 206107
Verkehrswesen

Michael Kuntz
Mat.Nr.: 206943
Maschinenbau

24. Juni 2004

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
25. JUNI 2004

20/20

1,0

Note:.....

Technische Universität Berlin
Institut für Konstruktion, Mikro- und
Medizintechnik - Konstruktionslehre

Professor Dr.-Ing. H. Mertens
Dipl.-Ing. B. Kloss

SS 04

Analytische Übung zu den Vorlesungen

„Beanspruchungsgerechtes Konstruieren II“ und „Konstruktionstechnik II“

Name: David Bieniek Matr. Nr.: 206107

Name: Michael Kunth Matr. Nr.: 206943

Übung Nr.: 7

Thema: Berechnung rotierender Scheiben

Ausgabe: **09.06.04** Abgabe: **24.06.04 zu Beginn der Übung**

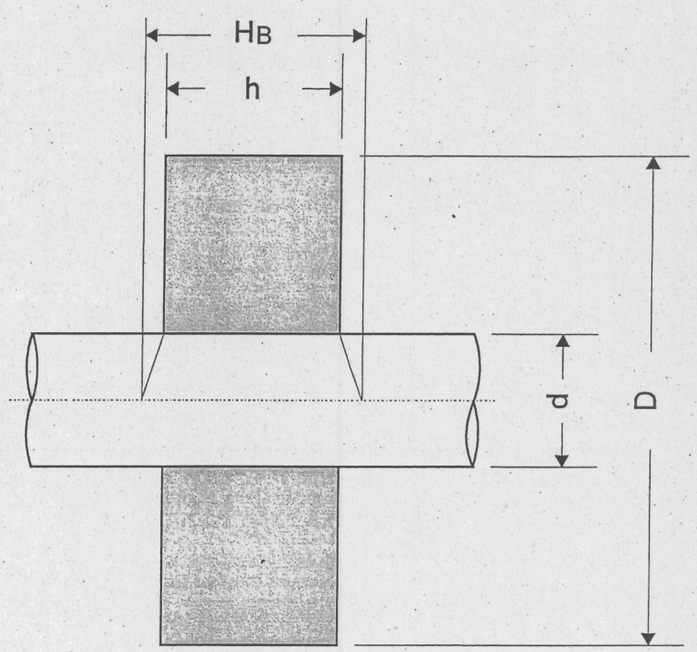
Aufgabe 7.1

Das dargestellte Schwungrad besteht aus einer Vollwelle mit aufgepreßter Scheibe. Zur Auslegung dieses Querpreßverbandes sind folgende Berechnungen durchzuführen:

a) Berechnen Sie die maximale Flächenpressung .

b) Berechnen Sie die Abhebedrehzahl.

c) Bestimmen Sie das maximal übertragbare Drehmoment bei n = 1500 min^{-1}.



Gegeben:

Geometrie	d = 800 mm
(Übermaß U = 1,3 mm)	
	D = 2500 mm
	h = 300 mm
Werkstoff:	Stahl
	$E = 210000\ N/mm^2$
	$\nu = 0,3$
Dichte	$\rho = 7,86\ kg/dm^3$
Haftbeiwert	$\mu = 0,14$
Rauhtiefe	$R_z = 4\ \mu m$

Sicherheit gegen Durchrutschen $S_R = 2,5$

Aufgabe 7.2 (*)

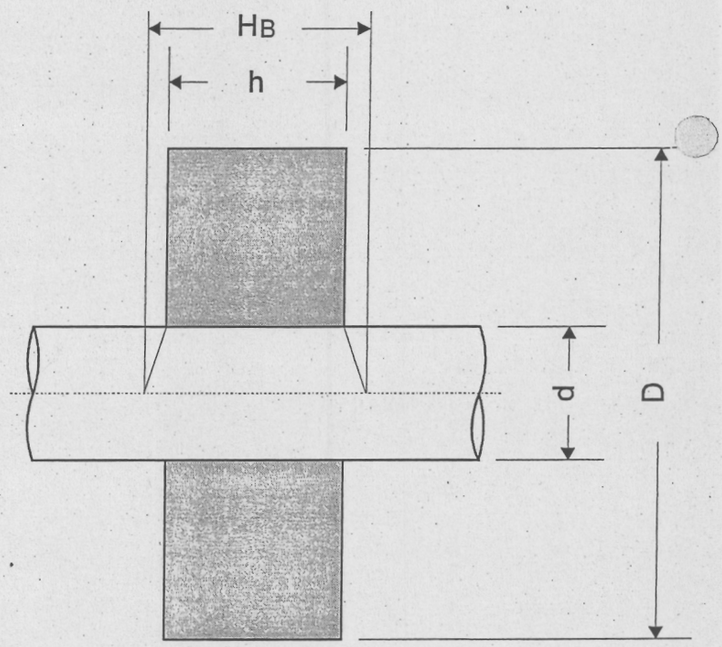
Alternativ zu dem konventionellen Vorgehen kann die Auslegung von Querpreßverbänden auch mit Hilfe von Übertragungsmatrizen durchgeführt werden. Für das dargestellte Schwungrad, bestehend aus einer Welle mit aufgepreßter Scheibe, sollen die Radialverschiebungen und Radialspannungen

a) in der Wellenmitte,

b) im Fügebereich und

c) am Außenrand der Nabe

bei maximalem Übermaß U_g bestimmt werden.



Gegeben:

Drehzahl	$n = 1400\ min^{-1}$
Geometrie	$d = 45$ mm
	$D = 230$ mm
	$h = 25$ mm
	$H_B = 45$ mm
Werkstoff:	$E = 206000\ N/mm^2$
(Stahl)	$\rho = 7{,}86\ kg/dm^3$
	$\nu = 0{,}3$

Passung 45H7/r6

alle Oberflächen Rz = 4 µm

Aufgabe 7.2

Spannungen:

$$\sigma_r = A - \frac{B}{r^2} - \frac{3+\nu}{8}\rho r^2\omega^2$$

$$\sigma_\varphi = A + \frac{B}{r^2} - \frac{1+3\nu}{8}\rho r^2\omega^2$$

$$v_r = \frac{r}{E}(\sigma_\varphi - \nu\sigma_r)$$

Randbedingungen für Wellenmitte:

$$v_{r,I} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_r(r=0) = 0$$

$$v_r = \frac{r}{E}\left[A + \frac{B}{r^2} - \left(\frac{1+3\nu}{8}\right)\rho r^2\omega^2 - A\nu - \frac{B}{r^2}\nu - \left(\frac{3+\nu}{8}\right)\rho r^2\omega^2\nu\right]$$

für $r=0$ muß $B=0$ sein, sodass $v_{r,I} = 0$ est.

- Zustandsvektor für Wellenmitte:

$$z_{i,I} = \begin{Bmatrix} \sigma_{r,I} \cdot H \\ v_{r,I} \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad H = \frac{H_B + h}{2}$$

$$\sigma_{r,I} = A$$

$$v_{r,I} = 0$$

$$z_{i,I} = \begin{Bmatrix} A \cdot H \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

- Den Zustandsvektor für den Außenbereich der Welle erhält man durch Multiplikation von $z_{i,I}$ mit der Übertragungsmatrix für die Welle:

$$z_{a,I} = U_I \cdot z_{i,I}$$

$$z_{a,I} = \begin{Bmatrix} A \cdot H\, U_{I,11} + U_{I,13} \\ A \cdot H \cdot U_{I,21} + U_{I,23} \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{r,a,I} \cdot H \\ v_{r,a,I} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

- Den Zustandsvektor für den Innenbereich der Nahe erhält man durch Multiplikation von z_{aI} mit der Übergangsmatrix für den Fügebereich:

$$z_{iA} = U_S \cdot z_{aI}$$

$$z_{iA} = \begin{Bmatrix} \sigma_{raI} \cdot H \\ v_{raI} + \frac{\Delta d_{eff}}{2} \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{ri,A} \cdot h \\ v_{ri,A} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

- Den Zustandsvektor für den Rand der Nahe erhält man durch Multiplikation von z_{iA} mit der Übertragungsmatrix für die Naht:

$$z_{aA} = U_A \cdot z_{iA}$$

$$z_{aA} = \begin{Bmatrix} \sigma_{riA} \cdot h \, u_{A11} + v_{ri,A} \cdot u_{A12} + u_{A13} \\ \sigma_{ri,A} \cdot h \cdot u_{A21} + v_{ri,A} \cdot u_{A22} + u_{A23} \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{raA} \cdot h \\ v_{raA} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Randbedingung für den Außenbereich der Naht:

$$\sigma_{raA} = 0 \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{\sigma_{riA} \cdot h \cdot u_{A11} + v_{ri,A} \cdot u_{A12} + u_{A13}}{h}$$

$$\sigma_{ri,A} \cdot h = \sigma_{raI} \cdot H$$

$$\sigma_{raI} \cdot H = A \cdot H \, u_{I11} + u_{I13}$$

$$\sigma_{ri,A} \cdot h = A \cdot H \cdot u_{I11} + u_{I13}$$

$$v_{ri,A} = v_{raI} + \frac{\Delta d_{eff}}{2}$$

$$v_{raI} = A \cdot H \cdot u_{I21} + u_{I23}$$

$$v_{ri,A} = A \cdot H \cdot u_{I21} + u_{I23} + \frac{\Delta d_{eff}}{2}$$

$$0 = \frac{\left(A \cdot H \cdot u_{I11} + u_{I13}\right) u_{A11} + \left(A \cdot H \cdot u_{I21} + u_{I23} + \frac{\Delta d_{eff}}{2}\right) u_{A12} + u_{A13}}{h}$$

$$A \cdot H \cdot u_{I11} \cdot u_{A11} + A \cdot H \cdot u_{I21} \cdot u_{A12} = -\left(u_{I13} \cdot u_{A11} + u_{I23} \cdot u_{A12} + \frac{\Delta d_{eff}}{2} \cdot u_{A12} + u_{A13}\right)$$

$$\boxed{A = \frac{-\left(u_{I13} \cdot u_{A11} + u_{I23} \cdot u_{A12} + \frac{\Delta d_{eff}}{2} \cdot u_{A12} + u_{A13}\right)}{H \cdot u_{I11} \cdot u_{A11} + H \cdot u_{I21} \cdot u_{A12}}}$$

Alle weiteren Berechnungen folgen —

gegebene Daten: Alle Werte und Ergebnisse in dieser Rechnung sind in den SI Einheiten m, 1/s, N/m^2, kg/m^3 angegeben.

Drehzahl: $n := \frac{1400}{60}$

Geometrie: $d := 0.045$

$D := 0.23$

$h := 0.025$

$H_B := 0.045$

Werkstoff: $E := 2.06 \cdot 10^{11}$

$\rho := 7.86 \cdot 10^{3}$

$\nu := 0.3$

$R_z := 4 \cdot 10^{-6}$

Passung 45H7/r6: $U_g := 50 \cdot 10^{-6}$

Aus den gegebenen Werten lassen sich die Winkelgeschwindigkeit, das wirksame Übermaß sowie eine mittlere Höhe H (für die Berücksichtigung der Spannungsausbreitung gemäß des Birger-Kegels) berechnen.

$\omega := 2 \cdot \pi \cdot n$ $\quad \omega = 146.6076572$

$\Delta d_{eff} := U_g - 0.8 \cdot (R_z + R_z)$ $\quad \Delta d_{eff} = 4.36 \times 10^{-5}$

$H := \frac{h + H_B}{2}$ $\quad H = 0.035$

Aus der zuvor hergeleiteten Gleichung lässt sich nun die Spannung $\sigma_{ri,l} = A$ in der Mitte der Vollwelle (r = 0) berechnen. Dazu müssen allerdings noch die einzelnen Einträge der Übertragungsmatrizen berechnet werden.

Für die Vollwelle können mit Elektro Hütte folgende Konstanten bestimmt werden:

$u_{l11} := 1$ $\quad u_{l21} := \frac{(1 - \nu) \cdot \frac{d}{2}}{E \cdot H}$

$$u_{l12} := 0$$

$$u_{l13} := \frac{-(3+\nu)}{8} \cdot \rho \cdot H \cdot \omega^2 \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$$u_{l22} := 0$$

$$u_{l23} := \frac{-\left(1-\nu^2\right)}{8 \cdot E} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^3$$

$$u_{l31} := 0$$

$$u_{l32} := 0$$

$$u_{l33} := 1$$

Für den Ring sehen die Einträge der Übertragungsmatrix nach Elektro Hütte wie folgt aus:

$$k := \frac{\frac{d}{2}}{\frac{D}{2}} \qquad k = 0.1956522$$

$$u_{A11} := 1 - (1-\nu) \cdot \frac{\left(1-k^2\right)}{2}$$

$$u_{A12} := E \cdot h \cdot \frac{\left(1-k^2\right)}{2 \cdot \frac{d}{2}}$$

$$u_{A13} := -\left[\rho \cdot h \cdot \omega^2 \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2\right] \cdot \left[1 + \nu + (1-\nu) \cdot \frac{\left(1+k^2\right)}{2}\right] \cdot \frac{\left(1-k^2\right)}{4}$$

$$u_{A21} := \frac{\left(1-\nu^2\right) \cdot \left(1-k^2\right) \cdot \frac{D}{2}}{2 \cdot E \cdot h}$$

$$u_{A22} := \frac{\left[1 - (1+\nu) \cdot \frac{\left(1-k^2\right)}{2}\right]}{k}$$

$$u_{A23} := -\left[\rho \cdot \omega^2 \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^3\right] \cdot \left(1-\nu^2\right) \cdot \frac{\left(1-k^2\right)^2}{8E}$$

$u_{A31} := 0$ $u_{A32} := 0$ $u_{A33} := 1$

Damit ergibt sich für $\sigma_{ri,I}$ = A folgender Wert:

$$A := \frac{-u_{A11}\cdot u_{I13} - u_{A12}\cdot u_{I23} - \frac{\Delta d_{eff}}{2}\cdot u_{A12} - u_{A13}}{\left(u_{A11}\cdot u_{I11} + u_{A12}\cdot u_{I21}\right)\cdot H} \qquad A = -7.5112598 \times 10^{7}$$

Die drei Übertragungsmatrizen sehen wie folgt aus:

$$U_I := \begin{pmatrix} u_{I11} & u_{I12} & u_{I13} \\ u_{I21} & u_{I22} & u_{I23} \\ u_{I31} & u_{I32} & u_{I33} \end{pmatrix} \qquad U_I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1.2347894 \times 10^{3} \\ 2.184466 \times 10^{-12} & 0 & -1.0625946 \times 10^{-9} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U_S := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\Delta d_{eff}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad U_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2.18 \times 10^{-5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U_A := \begin{pmatrix} u_{A11} & u_{A12} & u_{A13} \\ u_{A21} & u_{A22} & u_{A23} \\ u_{A31} & u_{A32} & u_{A33} \end{pmatrix}$$

$$U_A = \begin{pmatrix} 0.6633979 & 1.1006354 \times 10^{11} & -2.2338626 \times 10^{4} \\ 9.7712642 \times 10^{-12} & 1.9160628 & -1.3122333 \times 10^{-7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Außerdem lässt sich aus diesen drei Übertragungsmatrizen eine Gesamtübertragungsmatrix für dieses System bilden.

$$U_G := U_A \cdot U_S \cdot U_I \qquad U_G = \begin{pmatrix} 0.903828 & 0 & 2.3761104 \times 10^{6} \\ 1.3956838 \times 10^{-11} & 0 & 4.1624844 \times 10^{-5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Für die einzelnen Zustandsvektoren der Form $z_{a.b} := \begin{pmatrix} \sigma_{ra.b} \cdot h \\ v_{ra.b} \\ 1 \end{pmatrix}$

erhält man dann folgende Ergebnisse:

a) in der Wellenmitte:

$$z_{i.l} := \begin{pmatrix} A \cdot H \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad z_{i.l} = \begin{pmatrix} -2.6289409 \times 10^{6} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

also $\sigma_{ri.l} := \frac{z_{i.l_0}}{H} \cdot \frac{N}{m^2}$ $\boxed{\sigma_{ri.l} = -7.5112598 \times 10^{7}\,Pa}$

$v_{ri.l} := z_{i.l_1} \cdot m$ $\boxed{v_{ri.l} = 0\,m}$

b) im Fügebereich:

$$z_{a.l} := U_l \cdot z_{i.l} \qquad z_{a.l} = \begin{pmatrix} -2.6301757 \times 10^{6} \\ -5.7438947 \times 10^{-6} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$z_{i.A} := U_S \cdot z_{a.l} \qquad z_{i.A} = \begin{pmatrix} -2.6301757 \times 10^{6} \\ 1.6056105 \times 10^{-5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

also $\sigma_{ra.l} := \frac{z_{a.l_0}}{H} \cdot \frac{N}{m^2}$ $\boxed{\sigma_{ra.l} = -7.5147878 \times 10^{7}\,Pa}$

$v_{ra.l} := z_{a.l_1} \cdot m$ $\boxed{v_{ra.l} = -5.7438947 \times 10^{-6}\,m}$

$\sigma_{ri.A} := \frac{z_{i.A_0}}{h} \cdot \frac{N}{m^2}$ $\boxed{\sigma_{ri.A} = -1.0520703 \times 10^{8}\,Pa}$

$$v_{ri.A} := z_{i.A_1} \cdot m \qquad \boxed{v_{ri.A} = 1.6056105 \times 10^{-5}\,m}$$

c) am Außenrand der Nabe:

$$z_{a.A} := U_A \cdot z_{i.A} \qquad z_{a.A} = \begin{pmatrix} -2.6500402 \times 10^{-10} \\ 4.9331406 \times 10^{-6} \\ 1 \end{pmatrix}$$

oder

$$z_{a.A} := U_G \cdot z_{i.I} \qquad z_{a.A} = \begin{pmatrix} -5.6820681 \times 10^{-10} \\ 4.9331406 \times 10^{-6} \\ 1 \end{pmatrix}$$

also $$\sigma_{ra.A} := \frac{z_{a.A_0}}{h} \cdot \frac{N}{m^2} \qquad \boxed{\sigma_{ra.A} = -2.2728273 \times 10^{-8}\,Pa}$$

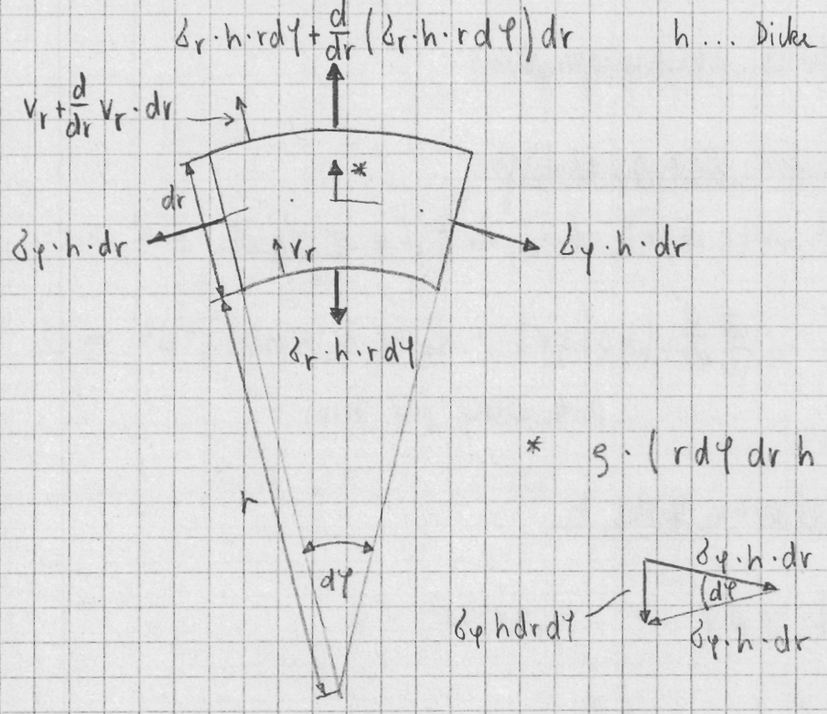
$$v_{ra.A} := z_{a.A_1} \cdot m \qquad \boxed{v_{ra.A} = 4.9331406 \times 10^{-6}\,m}$$

Der Wert für die Spannung am Außenrand der Nabe ist so klein, dass eine Abweichung von 0 durch Ungenauigkeiten aufgrund der stark verschiedenen Exponenten zu erklären ist.

Entwurfsberechnung rotationssymm. Bauteile

(mit rotationssymmetr. Belastungen)

Rotierende Scheibe



- Radialer Kraftgleichgewicht:

$$0 = \sigma_r h r d\varphi + \frac{d}{dr}(\sigma_r h r d\varphi) dr - \sigma_r h r d\varphi + \rho (r d\varphi dr h) r\omega^2 - \sigma_\varphi h dr d\varphi$$

$$= \frac{d}{dr}(\sigma_r h r d\varphi) dr + \rho (r d\varphi dr h) r\omega^2 - \sigma_\varphi h dr d\varphi$$

$$\Rightarrow \underline{0 = \frac{d}{dr}(\sigma_r \cdot h \cdot r) + \rho r^2 \omega^2 h - \sigma_\varphi \cdot h} \qquad (1)$$

- Verschiebungs / Verzerrungs - Relation

$$\varepsilon_r = \frac{v_r + \frac{d}{dr} v_r dr - v_r}{dr} = \frac{\frac{d}{dr} v_r dr}{dr} = \underline{\frac{d}{dr} v_r} \qquad (2)$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{(r + v_r) d\varphi - r d\varphi}{r d\varphi} = \underline{\frac{v_r}{r}} \qquad (3)$$

BRUNNEN

• Stoffgesetz: (Hooke, ESZ)

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\,\sigma_\varphi) \qquad (4)$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{E}(\sigma_\varphi - \nu\,\sigma_r) \qquad (5)$$

→ Lösungen dieses Gleichungssystems

a) Scheibe gleicher Beanspruchung

d.h. gesucht ist $h(r)$ für $\sigma_r = \sigma_\varphi = \sigma_{zul} = \sigma$

es folgt aus (1) $\quad \sigma \frac{d}{dr}(h(r)\cdot r) - \sigma \cdot h + \rho\, h(r)\, r^2 \omega^2 = 0$

ist DGL für $h(r)$

b) Scheibe konstanter Dicke h

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dr}(\sigma_r \cdot r) - \sigma_\varphi = -\rho r^2 \omega^2$$

$$\frac{d}{dr} v_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\,\sigma_\varphi) = \varepsilon_r$$

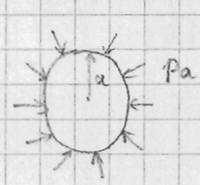
$$\frac{v_r}{r} = \frac{1}{E}(\sigma_\varphi - \nu\,\sigma_r) = \varepsilon_\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} \sigma_r &= A - \frac{B}{r^2} - \frac{3+\nu}{8}\rho r^2\omega^2 \\ \sigma_\varphi &= A + \frac{B}{r^2} - \frac{1+3\nu}{8}\rho r^2\omega^2 \\ E v_r &= r\left[A(1-\nu) + B(1-\nu)\frac{1}{r^2} - \frac{1-\nu^2}{8}\rho r^2\omega^2\right] \end{aligned}}$$

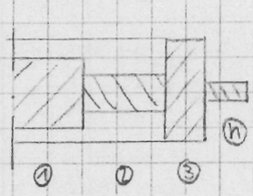
d.h. 2 Unbekannte A, B ⇝ 2 RB (pro Scheibe) nötig!

z.B. $\quad r = a: \ \sigma_r = -p_a$

$\quad r = 0: \ v_r = 0$



c) Scheiben veränderlicher Dicke



$k = 1, 2 \dots n$

- gleiche Verschiebungen: $\boxed{(v_r)_{k-1,a} = (v_r)_{k,i}}$
- Kraftfluss: $\boxed{(\delta_r \cdot h)_{k-1,a} = (\delta_r \cdot h)_{k,i}}$

} keine Schrumpfsitze

$\Rightarrow$ allg. $\underline{z}_{k-1,a} = \underline{z}_{k,i}$ $\quad \underline{z} \dots$ Zustandsvektor

- für einen „Ring"

$$\begin{pmatrix} \delta_r \cdot h \\ v_r \\ 1 \end{pmatrix}_{k,a} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_r \cdot h \\ v_r \\ 1 \end{pmatrix}_{k,i}$$

d.h. $\underline{z}_{k,a} = \underline{\underline{u}}_k \cdot \underline{z}_{k,i}$

$\underline{\underline{u}}_k \dots$ Übertragungsmatrix

- es gilt: $\underline{z}_{k,a} = \underline{\underline{u}}_k \cdot \underline{z}_{k,i}$

$\underline{z}_{k+1,a} = \underline{\underline{u}}_{k+1} \cdot \underline{z}_{k+1,i}$

$\underline{z}_{k+1,i} = \underline{z}_{k,a}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\underline{z}_{n,a} = \underbrace{\underline{\underline{u}}_n \cdot \underline{\underline{u}}_{n-1} \cdot \dots \cdot \underline{\underline{u}}_k \cdot \dots \underline{\underline{u}}_2 \cdot \underline{\underline{u}}_1}_{\underline{\underline{u}}_G} \cdot \underline{z}_{1,i}}$

- bei Schrumpfsitzen müssen entsprechende Übertragungsmatrizen berücksichtigt werden

BRUNNEN TH

Querpressverbindungen

Innenteil I i... innen

Außenteil A a... außen

vor dem Fügen: $D_{aI} > D_{iA}$ → es entsteht Fügekraft

nach dem Fügen: D_F

- wirksames Übermaß P_W bzw Δd_{eff}

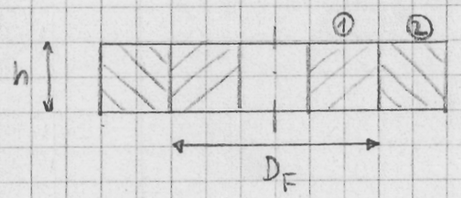
$$P_W = P - (R_{P1} + R_{P2}) = P - 0{,}8\,(R_{z,A} + R_{z,I})$$

P... geometr. Übermaß

R_{P1}, R_{P2} ... Glättungstiefen

bzw $\Delta d_{eff} = \Delta d - \dots$

Schrumpfsitz:



$$r_{1,a} + (v_r)_{1,a} - R_{P1} = r_{2,i} + (v_r)_{2,i} + R_{P2}$$

$$(\delta_r h)_{1,a} = (\delta_r h)_{2,i}$$

$$\Rightarrow 2(r_{1,a} - r_{2,i}) - 2(R_{P1} + R_{P2}) = 2\left[(v_r)_{2,i} - (v_r)_{1,a}\right]$$

$$\underbrace{\Delta d - \dots}_{\Delta d_{eff}} =$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta d_{eff}}{2} = (v_r)_{2,i} - (v_r)_{1,a}$$

$$\Rightarrow \boxed{(v_r)_{2,i} = (v_r)_{1,a} + \frac{\Delta d_{eff}}{2}}$$

so kann im Schrumpfsitz in Übertragungsmatrix festgehalten werden

BRUNNEN

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \sigma_r \cdot h \\ v_r \\ 1 \end{pmatrix}_{2,i} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\Delta d_{off}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{U}}_{12}} \begin{pmatrix} \sigma_r \cdot h \\ v_r \\ 1 \end{pmatrix}_{1,a}$$

$\underline{\underline{U}}_{12}$ ... Übertragungsmatrix bei Schrumpfsitz

Technische Universität Berlin
Institut für Konstruktion, Mikro- und
Medizintechnik - Konstruktionslehre

Professor Dr.-Ing. H. Mertens
Dipl.-Ing. B. Kloss

SS 04

Analytische Übung zu den Vorlesungen
„Beanspruchungsgerechtes Konstruieren II“ und „Konstruktionstechnik II“

Name: Matr. Nr.:

Name: Matr. Nr.:

Übung Nr.: 8

Thema: Berechnung rotationssymmetrischer Platten

Ausgabe: **17.06.04** Abgabe: **01.07.04 zu Beginn der Übung**

Aufgabe 8.1

Die skizzierte am äußeren Rand starr eingespannte Kreisplatte wird durch eine Flächenbelastung $p(r) = p = \text{konst}$ beaufschlagt. Berechnen Sie

a) die Biegemomente $M_r\,(r)$ und $M_\varphi\,(r)$

b) die Randspannungen $\sigma_r\,(r, z = \pm\, h/2)$ und $\sigma_\varphi\,(r, z = \pm\, h/2)$

c) den Querkraftverlauf $Q\,(r)$

d) die Durchsenkung $w\,(r)$ der Platte

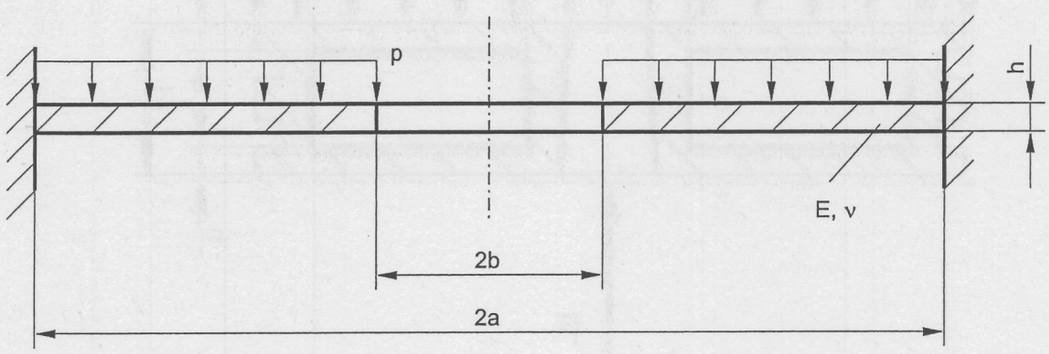


Abb. 1: Kreisplatte mit Flächenlast

Aufgabe 8.2 (*)

Der in Abbildung 2 dargestellte doppelwandige Niederddruckkolben einer Dampflokomotive aus Stahlguß ist beim Anfahren mit einem Druck $p = 0{,}64\ N \cdot mm^{-2}$ belastet. Die Nabe und der äußere Kranz des Kolbens können als starr angesehen werden. Die beiden Kolbenböden sind als kreisringförmige Platten zu betrachten.

a) Geben Sie die Rand- und Übergangsbedingungen der beiden Platten an !

b) Bestimmen Sie die Integrationskonstanten der Lösungen der beiden Plattendifferentialgleichungen !

c) Stellen Sie die radialen Verläufe der Durchbiegung, Radialspannung und Tangentialspannung für beide Platten graphisch dar !

d) Ermitteln Sie die Axialsteifigkeit des Kolbens $c_{ax} = F / w(r_a)$!

Gegeben:

$R = 348\ mm$; $r_a = 303\ mm$; $r_i = 67\ mm$; $r_B = 35\ mm$; $h = 24\ mm$; $H = 132\ mm$

$E = 210000\ N/mm^2$; $\nu = 0{,}3$

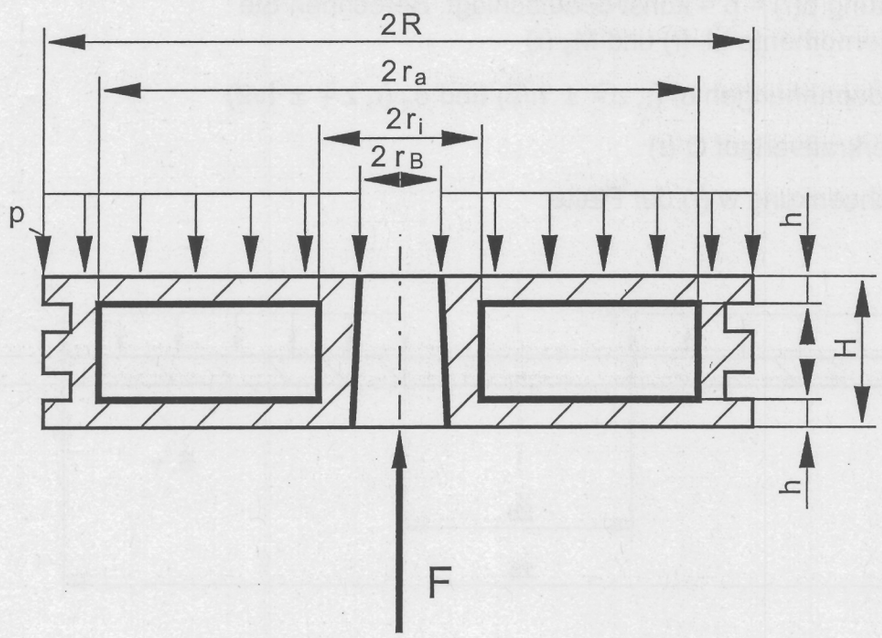
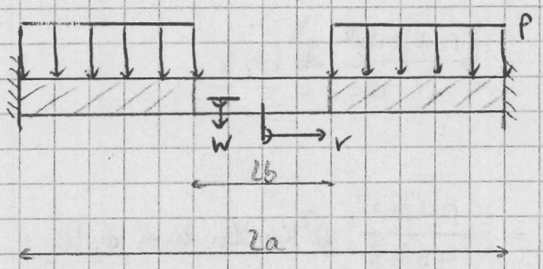


Abb. 2: Niederdruckkolben

24.06.04

Rotationssymmetrische Kreisplatten

(mit rotationssymm. Belastung)



$\updownarrow h$ $\quad \varrho = \frac{r}{a}$ (außen oder innen)

└ Bezugsradius; dort wo die meisten RB vorkommen

- Biege-Balken $\xrightarrow{2D}$ Platten
- Kirchhoffsche Platten DGL 4. Ordnung
- kleine Verformungen $w \ll h$
- isotrope Platten
- EVZ $(\varepsilon_z = 0)$

DGL für Balken:

$$EI\, w'''' = q(x)$$

DGL für Kreisplatte:

$$\left\{\left[\left(w' \cdot r\right)' \cdot \frac{1}{r}\right]' r\right\}' \frac{1}{r} = \frac{p(r)}{B}$$

└ Plattensteifigkeit

$$B = E^* \cdot I^* = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \frac{h^3}{12} \quad \Leftrightarrow \text{EVZ}$$

Allg. Plattentheorie

$$\Delta\Delta w = \frac{p}{B}$$

└ Laplace in Polarkoordinaten

$$(\,)' = \frac{d}{dr}$$

$$(\,)^{\circ} = \frac{d}{d\varrho}$$

BRUNNEN
Papier und viel mehr.

① $\left\{\left[(w^\circ \varsigma)^\circ \cdot \frac{1}{\varsigma}\right]^\circ \varsigma\right\}^\circ \frac{1}{\varsigma} = \frac{p(\varsigma)}{B} a^4 \qquad p = \text{const}$

$\int \left\{\left[(w^\circ \varsigma)^\circ \cdot \frac{1}{\varsigma}\right]^\circ \varsigma\right\}^\circ d\varsigma = \int \frac{p a^4}{B} \varsigma \, d\varsigma \qquad \Big| \int d\varsigma$

② $\left[(w^\circ \varsigma)^\circ \cdot \frac{1}{\varsigma}\right]^\circ \varsigma = \frac{p a^4}{B} \frac{\varsigma^2}{2} + \frac{k_1}{\varsigma}$

2. Integration:

$(w^\circ \varsigma)^\circ \cdot \frac{1}{\varsigma} = \frac{p a^4}{4B} \varsigma^2 + k_1 \ln \varsigma + k_2$

3. Integration:

$\int x \ln x \, dx = \frac{1}{2} x^2 (\ln x - \frac{1}{2})$

$(w^\circ \varsigma) = \int \left(\frac{p a^4}{4B} \varsigma^3 + \overbrace{k_1 \varsigma \ln \varsigma} + k_2 \varsigma\right) d\varsigma$

$= \frac{p a^4}{16B} \varsigma^4 + \frac{k_1}{4} \varsigma^2 (2 \ln \varsigma - 1) + \frac{k_2}{2} \varsigma^2 + k_3$

③ $w^\circ = \frac{p a^4}{16B} \varsigma^3 + \frac{k_1}{4} \varsigma (2 \ln \varsigma - 1) + \frac{k_2}{2} \varsigma + \frac{k_3}{\varsigma}$

4. Integration:

④ $w = \frac{p a^4}{64B} \varsigma^4 + \frac{k_1}{4} \varsigma^2 (\ln \varsigma - 1) + \frac{k_2}{4} \varsigma^2 + k_3 \ln \varsigma + k_4$

⑤ $w^{\circ\circ} = \frac{3}{16} \frac{p a^4}{B} \varsigma^2 + \frac{k_1}{4} \underbrace{[2 \ln \varsigma + 1 + \varsigma \frac{2}{\varsigma}]}_{2 \ln \varsigma + 1} + \frac{k_2}{2} - \frac{k_3}{\varsigma^2}$

Anpassen der allgemeinen Lösung an die RB:

Prüfung: nicht DGL auswendig

aber Schnitt: 2 RB

Platte: 4 RB

⑪ $w(\varsigma = 1) = 0$ wg. fester Einspannung

⑫ $w^\circ(\varsigma = 1) = 0$ wg. fester Einspannung $\left(w' = \frac{w^\circ}{a} ; \; w'' = \frac{w^{\circ\circ}}{a^2}\right)$

in BK II

(13) $\bar{M}_r(\varsigma = \frac{b}{a}) = 0$ freier Innenrand ($\sigma_r = 0$)

(14) $\bar{Q}(\varsigma = \frac{b}{a}) = 0$ freier Innenrand

(14) in (10) mit (2): $\varsigma = \frac{b}{a}$

$$0 = \frac{p}{B} a^4 \frac{b}{a \cdot 2} + \frac{k_1 a}{b}$$

$$\boxed{k_1 = -\frac{a^2 b^2}{2} \frac{p}{B}} \quad (15)$$

(12) in ~~(3)~~ (4): $\varsigma = 1$

$\ln(200\,\text{mm})$ wäre problematisch ↳ deshalb bezog. Rad ς gut

$$0 = \frac{p a^4}{B} \cdot \frac{1}{16} - \frac{a^2 b^2}{8} \frac{p}{B} \cdot 1 \left(2 \underbrace{\ln 1}_{=0} - 1\right) + \frac{k_2}{2} + k_3$$

$$\boxed{k_3 = \frac{k_1}{4} - \frac{k_2}{2} - \frac{p a^4}{16 B}} \quad (16)$$

(11) in ~~(4)~~ (3): $w(\varsigma = 1) = 0$

$$0 = \frac{p a^4}{64 B} - \frac{k_1}{4} + \frac{k_2}{4} + k_4$$

$$\boxed{k_4 = \frac{k_1}{4} - \frac{k_2}{4} - \frac{p a^4}{64 B}} \quad (17)$$

(13) in (6) mit (5) und ~~(3)~~ (4):

$$0 = \frac{p a^2 b^2 3}{B 16} + \frac{k_1}{4}\left(2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) + 1\right) + \frac{k_2}{2} - \frac{k_3 a^2}{b^2}$$

$$+ \nu \left[\frac{p a^2 b^2}{16 B} + \frac{k_1}{4}\left(2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) - 1\right) + \frac{k_2}{2} + \frac{k_3 a^2}{b^2}\right]$$

$$0 = \frac{p a^2 b^2}{16 B}(3+\nu) + \frac{k_1}{4}\left(2 \ln\left(\frac{b}{a}\right)(1+\nu) + (1-\nu)\right) + \frac{k_2}{2}(1+\nu)$$

$$- k_3 \frac{a^2}{b^2}(1-\nu) \quad (18)$$

(15) und (16) in (18)

$$\boxed{k_2 = \frac{p}{8B} a^2 b^2 \frac{(1+\nu)\left(4 \ln\left(\frac{b}{a}\right) - 1\right) - \frac{1-\nu}{(b/a)^2}\left(2 + \frac{1}{(b/a)^2}\right) - 2\nu}{(1+\nu) + \frac{1-\nu}{(b/a)^2}}}$$

BRUNNEN
Papier und viel mehr.

$\Rightarrow \ldots \Rightarrow k_1, k_2, k_3, k_4$

$\Rightarrow$ Biegelinie vollständig bestimmt in allen Abhängigen

$\Rightarrow$ Alle gesuchten Größen sind berechenbar.

Plausibilitätsprüfung:

- Einheitencheck
- von wo bis wo läuft unser ξ
- RB: am Außenrand: Verschiebung & Steigung $= 0$
  am Innenrand:

} Biegelinie

an Wendepunkten galt: $M = 0$

- Einheitencheck
- von wo bis wo läuft unsere x-Achse (ξ)
- RB: am Innenrand: $M = 0$
  am Außenrand: $M \neq 0$ (Einspannmoment)

} Biegemomente

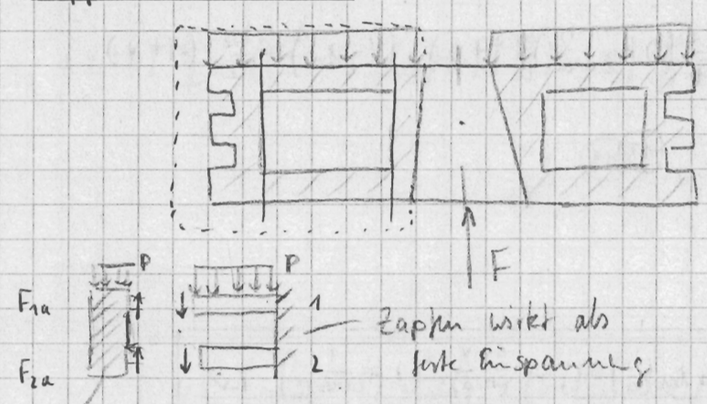
- Einheitencheck
- nimmt die x-Achse
- RB: am Innenrand: $\sigma_r = 0$
  am Außenrand: $\sigma_r \neq 0$

} Spannungen

- Einheitencheck
- nimmt die x-Werte
- RB: am Innenrand: $\bar{Q} = 0$

} Querkraft

Tipps zur HA 8.2



Kranz

- Mat. unbestimmt
- 4 RB pro Platte = 8 RB
  + 2 unbekannte Lasten F_{a1}, F_{a2} $\Rightarrow$ Gleichungssystem mit 10 Unbekannten

RB in 1-10 einsetzen & explizit angeben!

Lösungsvektor $\underline{x} = \begin{cases} K_{1,1} \\ K_{1,2} \\ K_{2,1} \\ K_{2,2} \\ \vdots \\ F_{a1} \\ F_{a2} \end{cases}$

Graphiken anfertigen!!!

zu d) F aus p rechnen (r_B bis R)

$$F = c \cdot x \qquad c_{ax} = \frac{F}{w_{ax}}$$

BRUNNEN
Papier und viel mehr

6. Hausaufgabe Beanspruchungsgerechtes Konstruieren II
Thema: Berechnung rotationssymmetrischer Platten

David Bieniek	Michael Kuntz
Mat.Nr.: 206107	Mat.Nr.: 206943
Verkehrswesen	Maschinenbau

Gr 4

28. Juni 2004

20/15 2.0

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
06. JULI 2004
Konstruktionslehre
Prof. Dr.-Ing. H. Meerkamm

Note:.....

Technische Universität Berlin
Institut für Konstruktion, Mikro- und
Medizintechnik - Konstruktionslehre

Professor Dr.-Ing. H. Mertens
Dipl.-Ing. B. Kloss

SS 04

Analytische Übung zu den Vorlesungen
„Beanspruchungsgerechtes Konstruieren II“ und „Konstruktionstechnik II“

Name: Matr. Nr.:

Name: Matr. Nr.:

Übung Nr.: 8

Thema: Berechnung rotationssymmetrischer Platten → in quer-Richtung beansprucht!

Ausgabe: **17.06.04** Abgabe: **01.07.04 zu Beginn der Übung**

Aufgabe 8.1

Die skizzierte am äußeren Rand starr eingespannte Kreisplatte wird durch eine Flächenbelastung p(r) = p = konst beaufschlagt. Berechnen Sie

a) die Biegemomente M_r (r) und M_φ (r)

b) die Randspannungen σ_r (r, z = ± h/2) und σ_φ (r, z = ± h/2)

c) den Querkraftverlauf Q (r)

d) die Durchsenkung w (r) der Platte

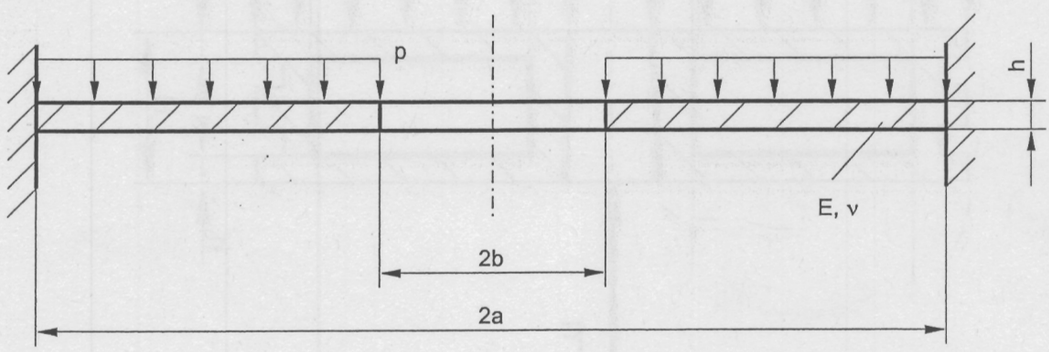


Abb. 1: Kreisplatte mit Flächenlast

Aufgabe 8.2 (*)

Der in Abbildung 2 dargestellte doppelwandige Niederdruckkolben einer Dampflokomotive aus Stahlguß ist beim Anfahren mit einem Druck $p = 0{,}64\ N \cdot mm^{-2}$ belastet. Die Nabe und der äußere Kranz des Kolbens können als starr angesehen werden. Die beiden Kolbenböden sind als kreisringförmige Platten zu betrachten.

a) Geben Sie die Rand- und Übergangsbedingungen der beiden Platten an !

b) Bestimmen Sie die Integrationskonstanten der Lösungen der beiden Plattendifferentialgleichungen !

c) Stellen Sie die radialen Verläufe der Durchbiegung, Radialspannung und Tangentialspannung für beide Platten graphisch dar !

d) Ermitteln Sie die Axialsteifigkeit des Kolbens $c_{ax} = F / w(r_a)$!

Gegeben:

$R = 348\ mm$; $r_a = 303\ mm$; $r_i = 67\ mm$; $r_B = 35\ mm$; $h = 24\ mm$; $H = 132\ mm$

$E = 210000\ N/mm^2$; $\nu = 0{,}3$

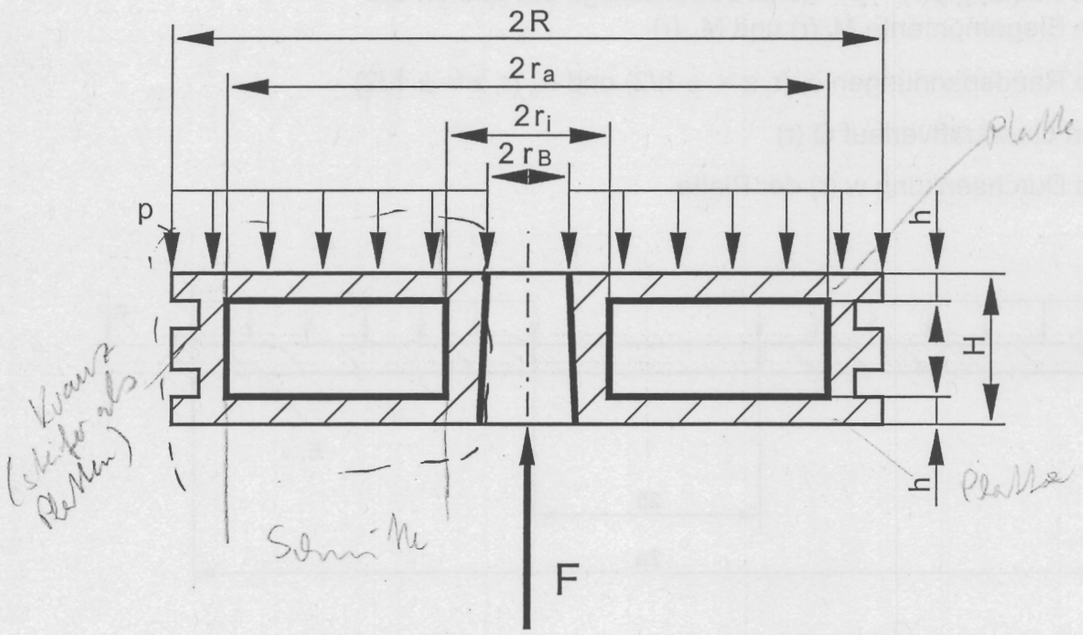
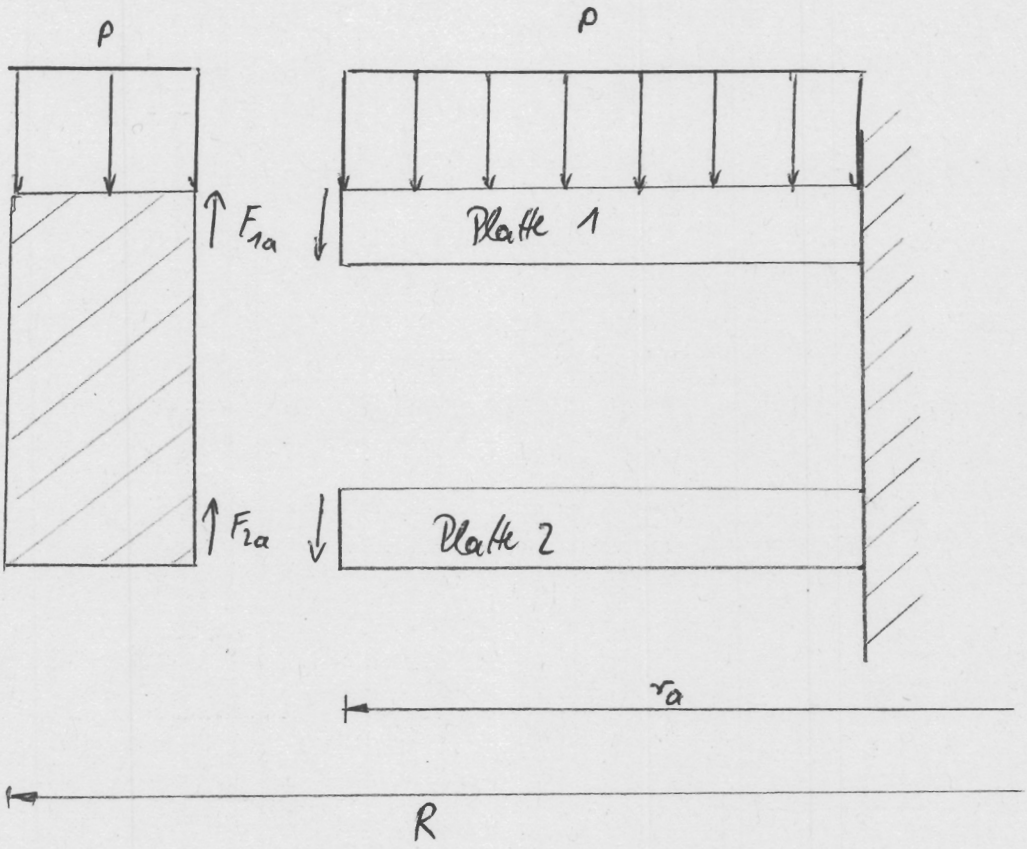


Abb. 2: Niederdruckkolben

Ersatzsystem für den Niederdruckkolben:



6. Hausaufgabe: Platten-Differenialgleichung

Alle Werte und Ergebnisse in dieser Rechnung sind in den SI Einheiten mm, N/mm und N/mm^2 angegeben.

gegebene Daten:

$p_1 := 0.64$ $p_2 := 0$

$R := 348$ $r_a := 303$ $r_i := 67$ $r_B := 35$

$h := 24$ $H := 132$

$E := 210000$ $\nu := 0.3$

- **Aufgabenteil a)**

Als Bezugsradius a wählen wir r_a, da wir an dieser Stelle die meisten Rand- und Übergangsbedingungen aufstellen werden.

gewählter Bezugsradius: $a := r_a$ $a = 303$

Rand- und Übergangsbedingungen für Platte 1:

a) $M_{1.r}(\rho = 1) = 0$

b) $w_1\left(\rho = \frac{r_i}{a}\right) = 0$

c) $w°_1\left(\rho = \frac{r_i}{a}\right) = 0$

Rand- und Übergangsbedingungen für Platte 2:

e) $M_{2.r}(\rho = 1) = 0$

f) $w_2\left(\rho = \frac{r_i}{r_a}\right) = 0$

g) $w°_2\left(\rho = \frac{r_i}{r_a}\right) = 0$

d) $Q_{1.quer}(\rho = 1) = \frac{F_{1a}}{2 \cdot \pi \cdot r}$

h) $Q_{2.quer}(\rho = 1) = \frac{F_{2a}}{2 \cdot \pi \cdot r}$

<u>weiterhin muss gelten:</u>

i) $F_{1a} + F_{2a} = p_1 \cdot \pi \cdot \left(R^2 - r_a^2\right)$

j) $w_1(\rho = 1) = w_2(\rho = 1)$

In all diese Gleichungen berechnet sich der bezogene Radius ρ mit: $\rho = \frac{r}{r_a}$

- **<u>Aufgabenteil b)</u>**

Die Rand- und Übergangsbedingungen werden in die Formeln aus dem BK II-Skript S.10 eingesetzt (siehe Blatt).

Plattensteifigkeit: $B := \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot \left(1 - \nu^2\right)}$ $B = 2.658 \times 10^8$

zu b) Einsetzen der Rand- & Übergangsbedingungen in die Gleichungen aus BK II S. 10.

<u>für Platte 1</u> mit p_1 und $K_1 - K_4$ und ~~F_{1a}~~ F_{1a}

a) in ⑥ mit ④ und ⑤ $\Rightarrow$ II

$$\Rightarrow 0 = -\frac{B}{a^2}\left(\frac{p_1}{B}a^4 \cdot \frac{3}{16} + \frac{K_1}{4}(2\ln 1 + 1) + \frac{K_2}{2} - \frac{K_3}{1} + \right.$$
$$\left. + \nu\left(\frac{p_1}{B}a^4 \frac{1}{16} + \frac{K_1}{4}\cdot(2\ln 1 - 1) + \frac{K_2}{2} + K_3\right)\right)$$

$$\Rightarrow -\frac{p_1}{B}a^4\frac{\left(\frac{r_i}{a}\right)^3}{16} = \frac{K_1}{4}\left(\frac{r_i}{a}\right)(2\ln$$

$$\Rightarrow \frac{p_1}{16}a^2(3+\nu) = -K_1\left(\frac{B}{4a^2} + \frac{\nu B}{4a^2}\right) - K_2\left(\frac{B}{2a^2} + \frac{\nu B}{2a^2}\right) + K_3\left(\frac{B}{a^2} - \frac{\nu B}{a^2}\right)$$

b) in ③ $\Rightarrow$ I

$$\Rightarrow -\frac{p_1}{B}a^4\left(\frac{r_i}{a}\right)^4\cdot\frac{1}{64} = \frac{K_1}{4}\left(\frac{r_i}{a}\right)^2\left(\ln\left(\frac{r_i}{a}\right) - 1\right) + \frac{K_2}{4}\left(\frac{r_i}{a}\right)^2 + K_3\ln\left(\frac{r_i}{a}\right) + K_4$$

c) in ④ $\Rightarrow$ III

$$\Rightarrow -\frac{p_1}{B}a^4\frac{\left(\frac{r_i}{a}\right)^3}{16} = \frac{K_1}{4}\left(\frac{r_i}{a}\right)\left(2\ln\left(\frac{r_i}{a}\right) - 1\right) + \frac{K_2}{2}\left(\frac{r_i}{a}\right) + \frac{K_3}{\left(\frac{r_i}{a}\right)}$$

Sichtüberdurchsicht

d) in ⑩ mit ② $\Rightarrow$ IV

$$\Rightarrow -\frac{p_1 a}{2} = \frac{F_{1a}}{2\pi r_a} + \frac{B K_1}{a^3}$$

BRUNNEN
Papier und viel mehr.

für Platte 2 mit p_2 und $K_5 - K_8$ und ~~F_{2a}~~ F_{2a}

e) in ⑥ mit ④ und ⑤ $\Rightarrow$ V

$$\Rightarrow \frac{p_2}{16} a^2 (3+\nu) = -K_5 \left(\frac{B}{4a^2} + \frac{\nu B}{4a^2} \right) - K_6 \left(\frac{B}{2a^2} + \frac{\nu B}{2a^2} \right) + K_7 \left(\frac{B}{a^2} - \frac{\nu B}{a^2} \right)$$

f) in ③ $\Rightarrow$ VI

$$\Rightarrow -\frac{p_2}{B} a^4 \frac{\left(\frac{r_i}{a}\right)^4}{64} = \frac{K_5}{4} \left(\frac{r_i}{a}\right)^2 \left(\ln\left(\frac{r_i}{a}\right) - 1 \right) + \frac{K_6}{4} \left(\frac{r_i}{a}\right)^2 + K_7 \ln\left(\frac{r_i}{a}\right) + K_8$$

g) in ④ $\Rightarrow$ VII

$$\Rightarrow -\frac{p_2}{B} a^4 \frac{\left(\frac{r_i}{a}\right)^3}{16} = \frac{K_5}{4} \left(\frac{r_i}{a}\right) \left(2\ln\left(\frac{r_i}{a}\right) - 1 \right) + \frac{K_6}{2} \left(\frac{r_i}{a}\right) + \frac{K_7}{\left(\frac{r_i}{a}\right)}$$

h) in ⑩ mit ② $\Rightarrow$ VIII

$$\Rightarrow -\frac{p_2 a}{2} = \frac{F_{2a}}{2\pi r_a} + \frac{B K_5}{a^3}$$

die 2 weiteren Gleichungen

aus i) $\Rightarrow$ IX

linke Seite

$$\Rightarrow F_{1a} + F_{2a} = p_1 (R^2 - r_a^2) \pi$$

j) in ③ $\Rightarrow$ X

$$\Rightarrow \frac{p_1}{B} a^4 \frac{1}{64} + \frac{K_1}{4} (\ln 1 - 1) + \frac{K_2}{4} \cdot 1 + K_3 \ln 1 + K_4 = \frac{p_2}{B} a^4 \frac{1}{64} + \frac{K_5}{4} (\ln 1 - 1) + \frac{K_6}{4} \cdot 1 + K_7 \ln 1 + K_8$$

$$\Rightarrow \frac{p_1}{B} a^4 \frac{1}{64} - \frac{p_2}{B} a^4 \frac{1}{64} = \frac{K_1}{4} - \frac{K_2}{4} - K_4 - \frac{K_5}{4} + \frac{K_6}{4} + K_8$$

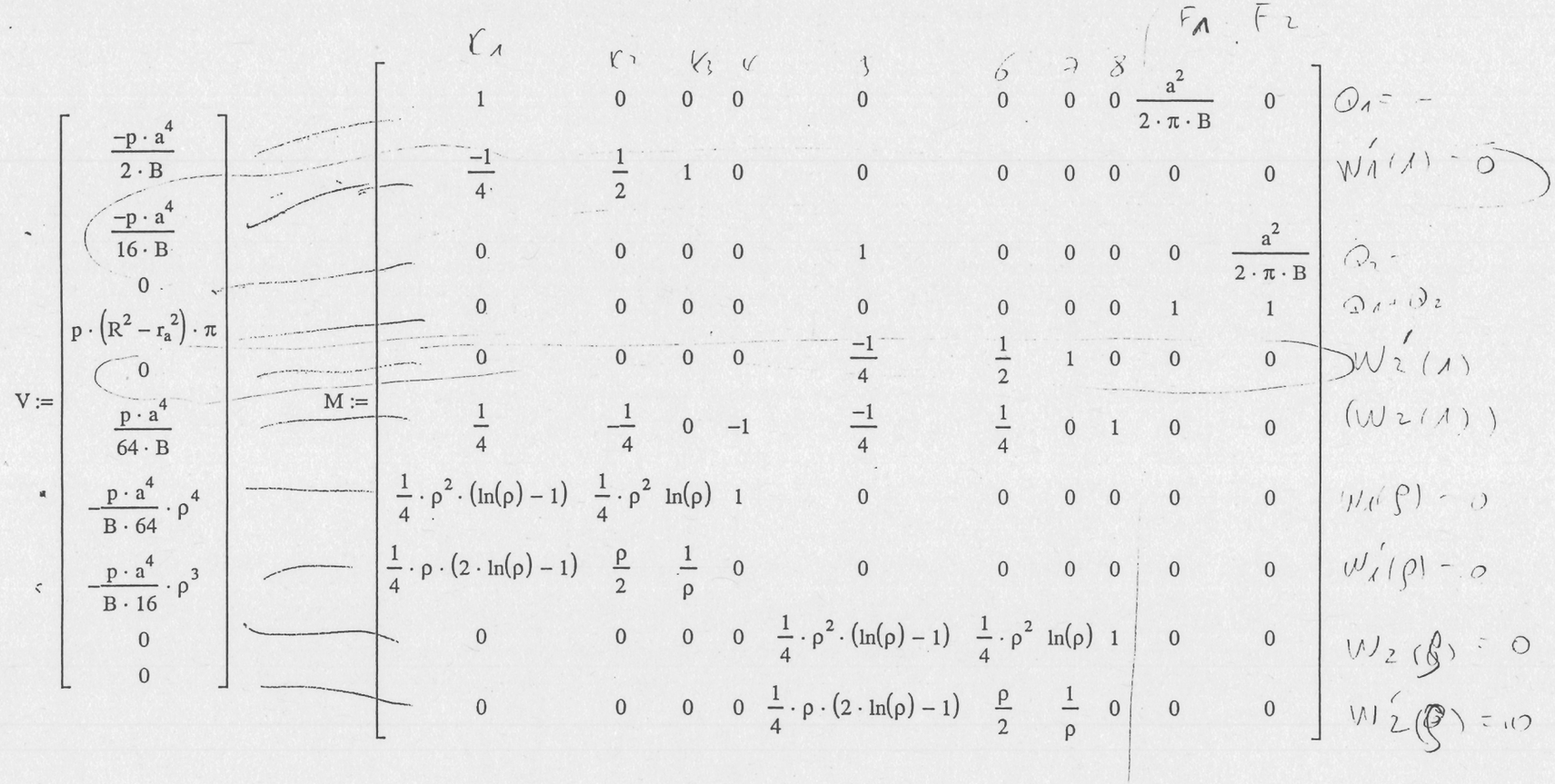
Nun haben wir 10 Gleichungen I - X für die 10 Unbekannten und können ein lineares Gleichungssystem aufstellen und die Unbekannten zu bestimmen

Die 10 aufgestellten Gleichungen I - X werden zu einem linearen Gleichungssystem der Form M * x = v zusammengefasst.

$$M := \begin{bmatrix}
\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{r_i}{a}\right)^2\cdot\left(\ln\left(\frac{r_i}{a}\right)-1\right) & \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{r_i}{a}\right)^2 & \ln\left(\frac{r_i}{a}\right) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\left(\frac{B}{4\cdot a^2}+\frac{\nu\cdot B}{4\cdot a^2}\right) & -\left(\frac{B}{2\cdot a^2}+\frac{\nu\cdot B}{2\cdot a^2}\right) & \left(\frac{B}{a^2}-\frac{\nu\cdot B}{a^2}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{r_i}{a}\right)\cdot\left(2\cdot\ln\left(\frac{r_i}{a}\right)-1\right) & \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{r_i}{a}\right) & \frac{1}{\left(\frac{r_i}{a}\right)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{B}{a^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\cdot\pi\cdot r_a} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{r_i}{a}\right)^2\cdot\left(\ln\left(\frac{r_i}{a}\right)-1\right) & \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{r_i}{a}\right)^2 & \ln\left(\frac{r_i}{a}\right) & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\left(\frac{B}{4\cdot a^2}+\frac{\nu\cdot B}{4\cdot a^2}\right) & -\left(\frac{B}{2\cdot a^2}+\frac{\nu\cdot B}{2\cdot a^2}\right) & \left(\frac{B}{a^2}-\frac{\nu\cdot B}{a^2}\right) & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{r_i}{a}\right)\cdot\left(2\cdot\ln\left(\frac{r_i}{a}\right)-1\right) & \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{r_i}{a}\right) & \frac{1}{\left(\frac{r_i}{a}\right)} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{B}{a^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\cdot\pi\cdot r_a} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & -1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 1 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

Im Vektor v stehen dabei jeweils die linken Seiten der Gleichungen I - X.

$$v := \begin{bmatrix} \frac{p_1}{B} \cdot a^4 \cdot \frac{\left(\frac{r_i}{a}\right)^4}{64} \\ \frac{p_1}{16} \cdot a^2 \cdot (3 + \nu) \\ \frac{p_1}{B} \cdot a^4 \cdot \frac{\left(\frac{r_i}{a}\right)^3}{16} \\ \frac{p_1}{2} \cdot a \\ \frac{p_2}{B} \cdot a^4 \cdot \frac{\left(\frac{r_i}{a}\right)^4}{64} \\ \frac{p_2}{16} \cdot a^2 \cdot (3 + \nu) \\ \frac{p_2}{B} \cdot a^4 \cdot \frac{\left(\frac{r_i}{a}\right)^3}{16} \\ \frac{p_2}{2} \cdot a \\ p_1 \cdot \left(R^2 - {r_a}^2\right) \cdot \pi \\ \frac{p_1}{B} \cdot a^4 \cdot \frac{1}{64} - \frac{p_2}{B} \cdot a^4 \cdot \frac{1}{64} \end{bmatrix}$$



Gleichungssystem das zur richtigen Lsg. führt

Dieses lineare Gleichungssystem wird nun mit Hilfe von MathCad gelöst wobei MathCad einen Lösungsvektor x folgender Gestalt liefert.

$$x = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ K_4 \\ K_5 \\ K_6 \\ K_7 \\ K_8 \\ F_{1a} \\ F_{2a} \end{pmatrix} \qquad x := \text{lsolve}(M, v) \qquad x = \begin{pmatrix} -8.731 \\ -2.473 \\ -0.371 \\ -0.799 \\ -4.652 \\ 2.027 \\ -0.278 \\ -0.587 \\ -2.574 \times 10^4 \\ 8.464 \times 10^4 \end{pmatrix}$$

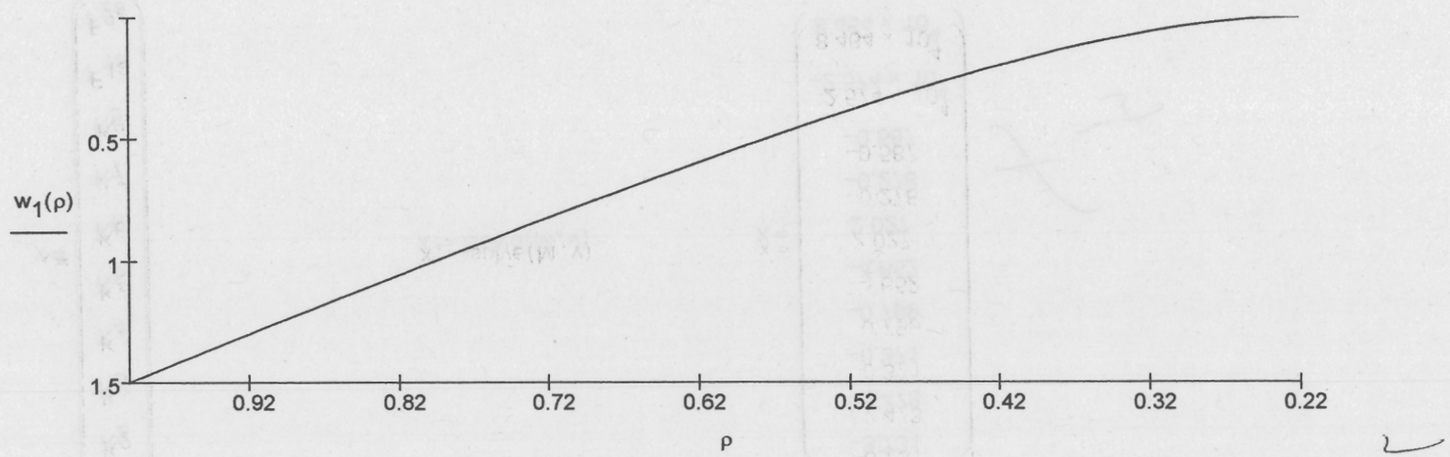
Damit sind alle Unbekannten (Integrationskonstanten K_1 - K_8 und Schnittkräfte F_{1a} und F_{2a}) ermittelt.

- **Aufgabenteil c)**

Für beide Platten werden die Radial- und Umfangsspannungen σ_r und σ_ϕ jeweils für die Druckseite (z = -h/2) und die Zugseite (z = h/2) aufgetragen.

Verläufe für Platte 1: $\rho := 0.22, 0.23 .. 1$

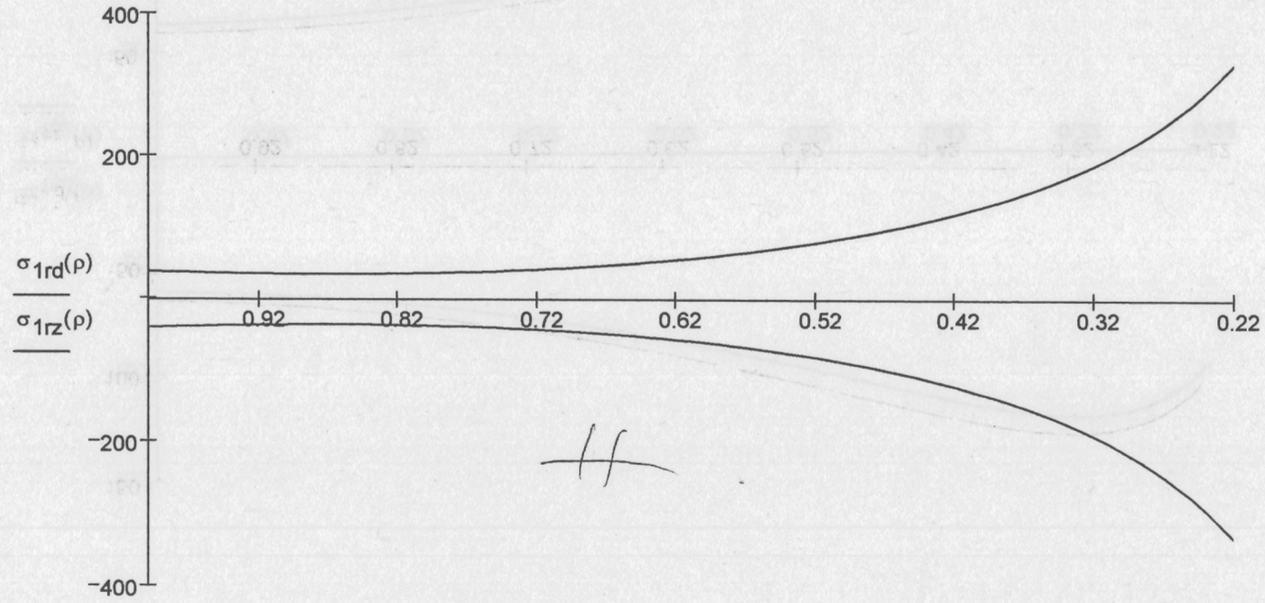
Durchbiegung: $w_1(\rho) := \frac{p_1}{B} \cdot a^4 \cdot \frac{\rho^4}{64} + \frac{x_0}{4} \cdot \rho^2 \cdot (\ln(\rho) - 1) + \frac{x_1}{4} \cdot \rho^2 + x_2 \cdot \ln(\rho) + x_3$



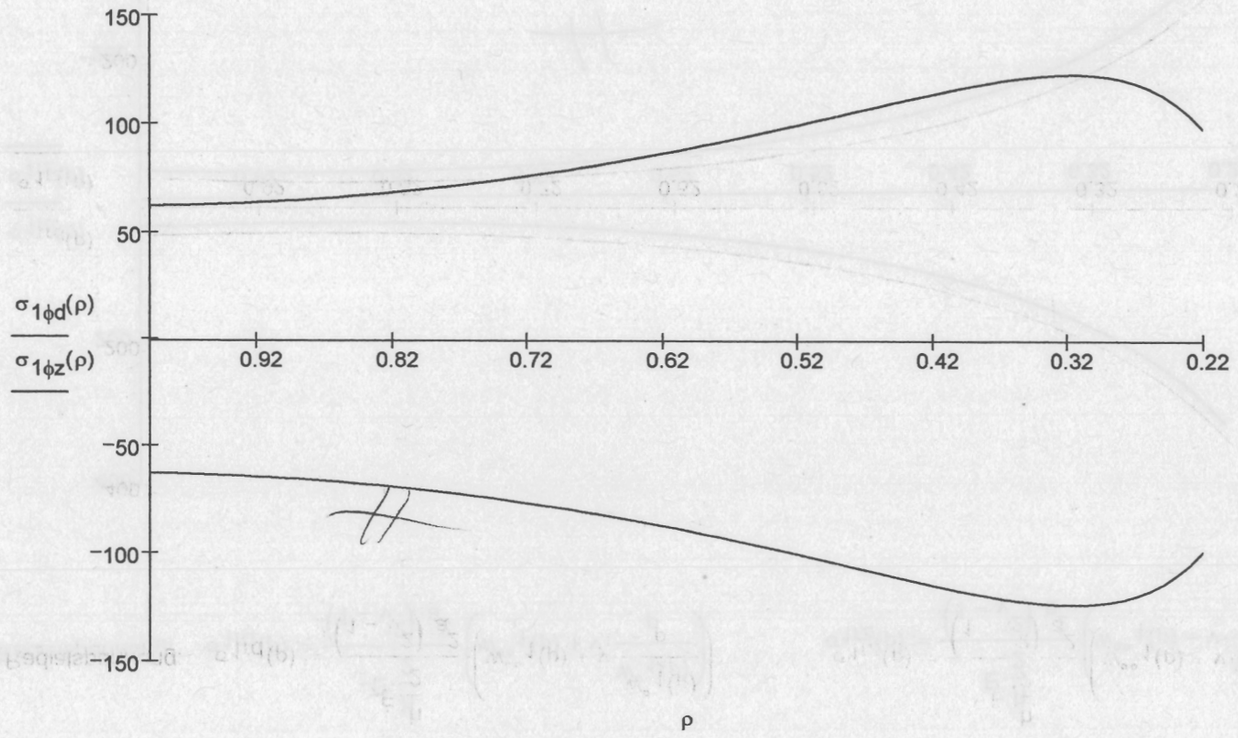
$w°_1(\rho) := \frac{p_1}{B} \cdot a^4 \cdot \frac{\rho^3}{16} + \frac{x_0}{4} \cdot \rho \cdot (2 \cdot \ln(\rho) - 1) + \frac{x_1}{2} \cdot \rho + \frac{x_2}{\rho}$

$w°°_1(\rho) := \frac{p_1}{B} \cdot a^4 \cdot \frac{3 \cdot \rho^2}{16} + \frac{x_0}{4} \cdot (2 \cdot \ln(\rho) + 1) + \frac{x_1}{2} - \frac{x_2}{\rho^2}$

Radialspannung: $\sigma_{1rd}(\rho) := \frac{-E\cdot\frac{h}{2}}{\left(1-\nu^2\right)\cdot a^2}\cdot\left(w^{\circ\circ}{}_1(\rho)+\nu\cdot\frac{w^{\circ}{}_1(\rho)}{\rho}\right)$ $\sigma_{1rz}(\rho) := \frac{E\cdot\frac{h}{2}}{\left(1-\nu^2\right)\cdot a^2}\cdot\left(w^{\circ\circ}{}_1(\rho)+\nu\cdot\frac{w^{\circ}{}_1(\rho)}{\rho}\right)$

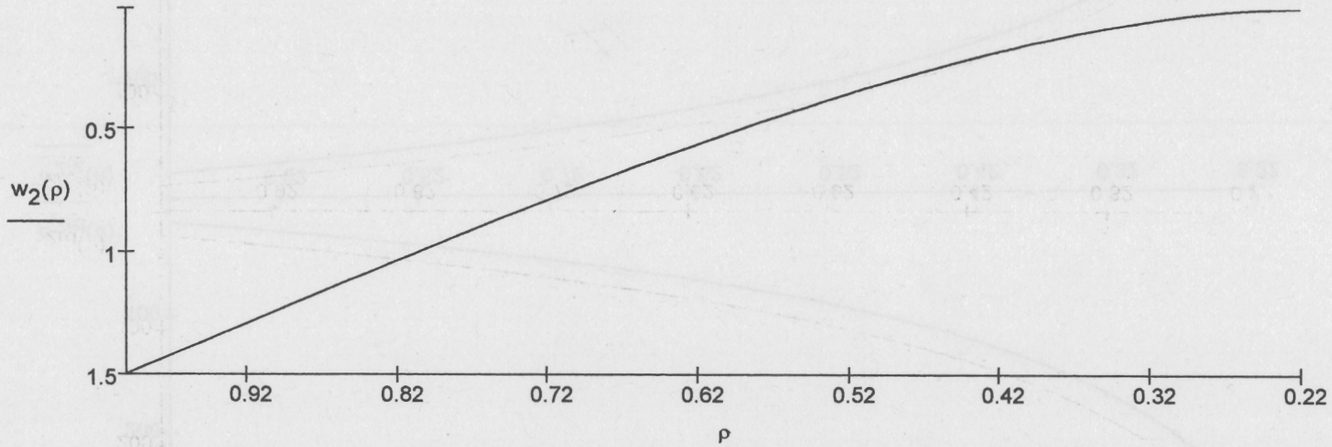


Umfangsspannung: $\sigma_{1\phi d}(\rho) := \frac{-E\cdot\frac{h}{2}}{\left(1-\nu^2\right)\cdot a^2}\cdot\left(\nu\cdot w^{\circ\circ}{}_1(\rho)+\frac{w^{\circ}{}_1(\rho)}{\rho}\right)$ $\sigma_{1\phi z}(\rho) := \frac{E\cdot\frac{h}{2}}{\left(1-\nu^2\right)\cdot a^2}\cdot\left(\nu\cdot w^{\circ\circ}{}_1(\rho)+\frac{w^{\circ}{}_1(\rho)}{\rho}\right)$



Verläufe für Platte 2:

Durchbiegung: $w_2(\rho) := \frac{p_2}{B} \cdot a^4 \cdot \frac{\rho^4}{64} + \frac{x_4}{4} \cdot \rho^2 \cdot (\ln(\rho) - 1) + \frac{x_5}{4} \cdot \rho^2 + x_6 \cdot \ln(\rho) + x_7$

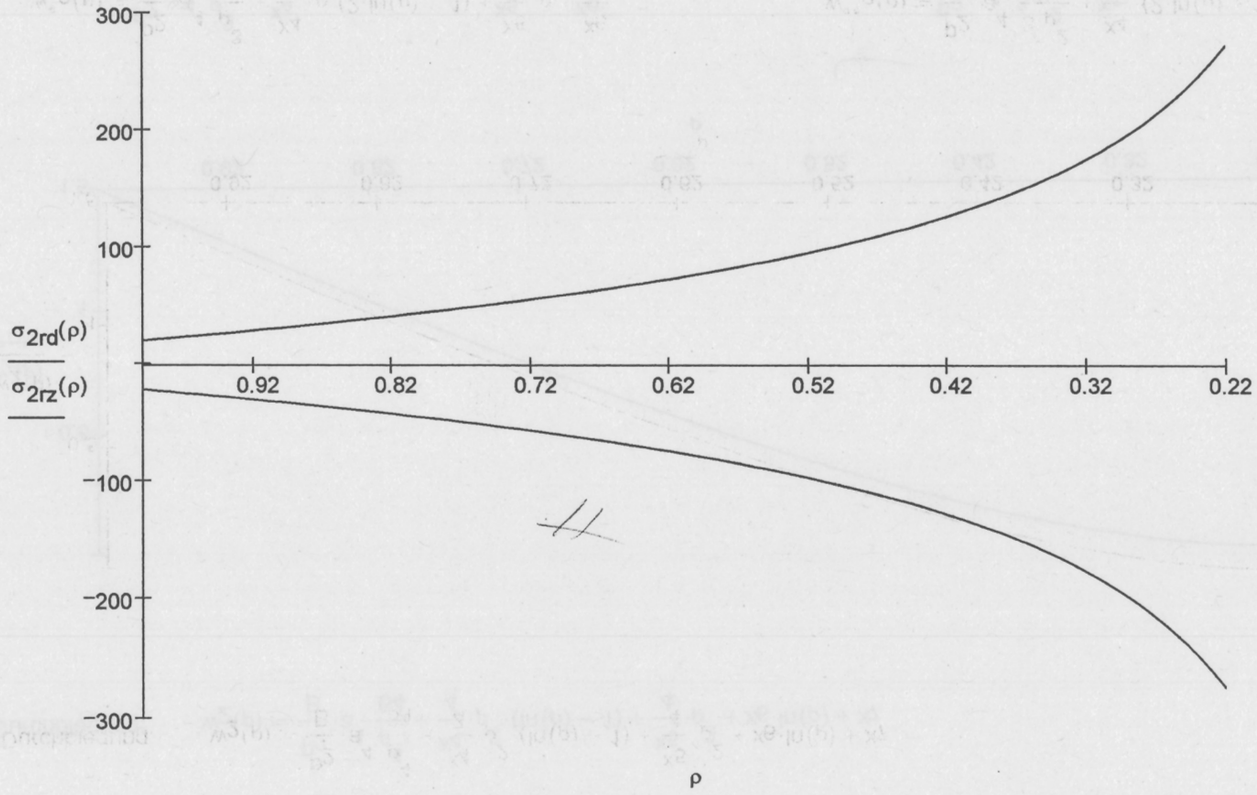


$w'_2(\rho) := \frac{p_2}{B} \cdot a^4 \cdot \frac{\rho^3}{16} + \frac{x_4}{4} \cdot \rho \cdot (2 \cdot \ln(\rho) - 1) + \frac{x_5}{2} \cdot \rho + \frac{x_6}{\rho}$

$w''_2(\rho) := \frac{p_2}{B} \cdot a^4 \cdot \frac{3 \cdot \rho^2}{16} + \frac{x_4}{4} \cdot (2 \cdot \ln(\rho) + 1) + \frac{x_5}{2} - \frac{x_6}{\rho^2}$

Radialspannung: $\sigma_{2rd}(\rho) := \frac{-E \cdot \frac{h}{2}}{\left(1-\nu^2\right) \cdot a^2} \cdot \left(w^{\circ\circ}{}_2(\rho) + \nu \cdot \frac{w^{\circ}{}_2(\rho)}{\rho} \right)$

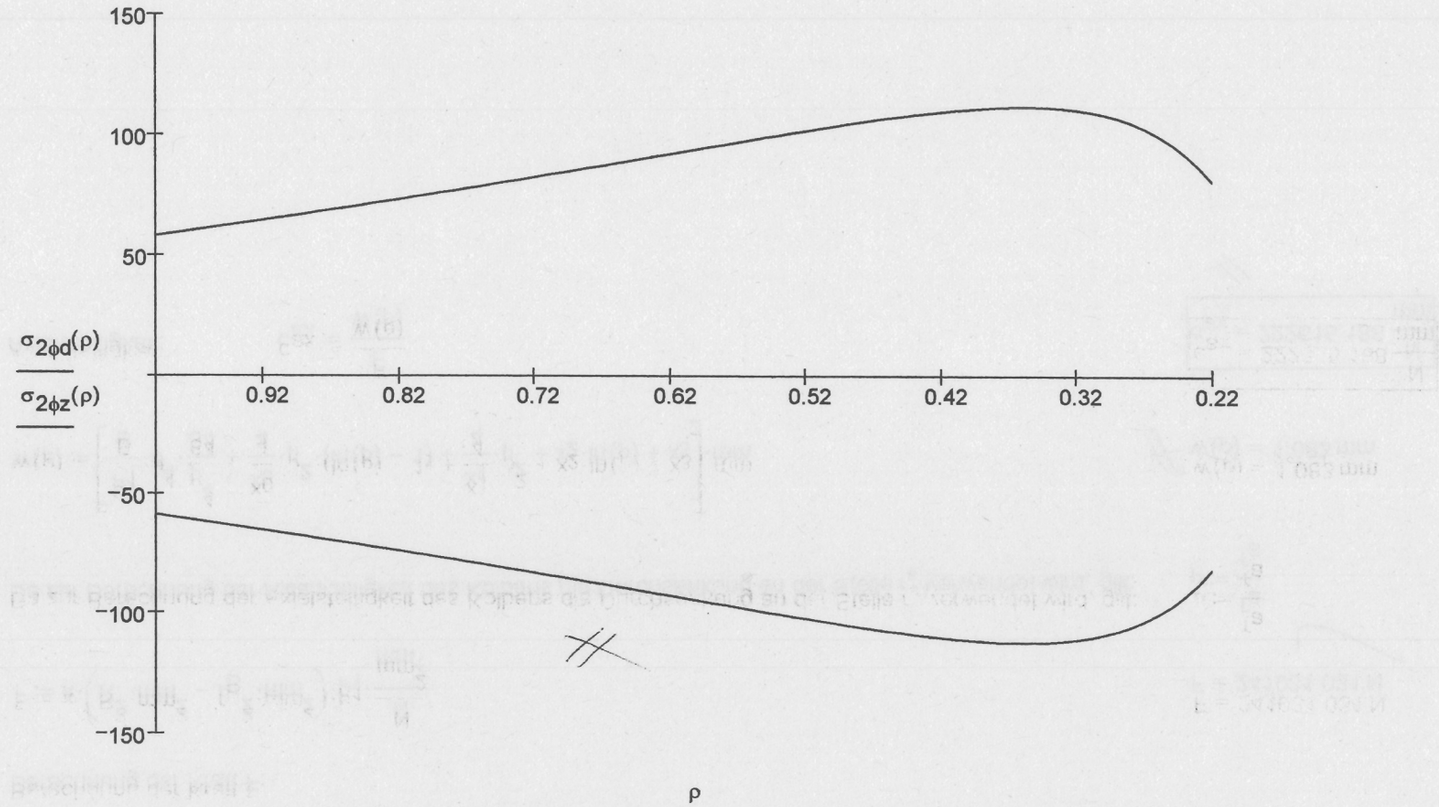
$\sigma_{2rz}(\rho) := \frac{E \cdot \frac{h}{2}}{\left(1-\nu^2\right) \cdot a^2} \cdot \left(w^{\circ\circ}{}_2(\rho) + \nu \cdot \frac{w^{\circ}{}_2(\rho)}{\rho} \right)$



Umfangsspannung:

$$\sigma_{2\phi d}(\rho) := \frac{-E\cdot\frac{h}{2}}{\left(1-\nu^2\right)\cdot a^2}\cdot\left(\nu\cdot w^{\circ\circ}{}_2(\rho)+\frac{w^{\circ}{}_2(\rho)}{\rho}\right)$$

$$\sigma_{2\phi z}(\rho) := \frac{E\cdot\frac{h}{2}}{\left(1-\nu^2\right)\cdot a^2}\cdot\left(\nu\cdot w^{\circ\circ}{}_2(\rho)+\frac{w^{\circ}{}_2(\rho)}{\rho}\right)$$



- **Aufabenteil d)**

Berechnung der Kraft F:

$$F := \pi \cdot \left(R^2 \cdot mm^2 - r_B{}^2 \cdot mm^2 \right) \cdot p_1 \cdot \frac{N}{mm^2} \qquad F = 241031.031\,N$$

Da zur Berechnung der Axialsteifigkeit des Kolbens die Durchsenkung an der Stelle r_a verwendet wird, gilt: $\rho := \frac{r_a}{r_a}$

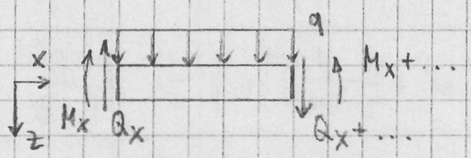
$$w(\rho) := \left[\frac{p_1}{B} \cdot a^4 \cdot \frac{\rho^4}{64} + \frac{x_0}{4} \cdot \rho^2 \cdot (\ln(\rho) - 1) + \frac{x_1}{4} \cdot \rho^2 + x_2 \cdot \ln(\rho) + x_3 \right] \cdot mm \qquad w(\rho) = 1.083\,mm$$

Axialsteifigkeit: $c_{ax} := \frac{F}{w(\rho)}$

$$\boxed{c_{ax} = 222615.188 \frac{N}{mm}}$$

Kreisplatten konstanter Dicke

- Erinnerung an Balken: → ESZ



$$EI\,w'' = -M_x \qquad M_x' = Q_x$$
$$EI\,w''' = -Q_x \qquad Q' = -q$$
$$EI\,w^{IV} = q$$

- am Balkenende gibt es 4 Informationen

$$w,\ w',\ Q,\ M_x$$

⇒ Übergang zum breiten Balken: → EDZ

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_y = \nu\sigma_x$$

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) = \frac{1-\nu^2}{E}\sigma_x}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E^*} \qquad E^* = \frac{E}{1-\nu^2}$$

E^* ... rechn. E-Modul für breite Balken

$$\Rightarrow \quad E^* I\,w'' = -M_x$$
$$E^* I\,w''' = -Q$$
$$E^* I\,w^{IV} = q$$

mit Plattenstreifen mit b und h $\rightsquigarrow I = \frac{b\cdot h^3}{12}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} B\cdot w'' &= -\bar{M}_x \\ B\cdot w''' &= -\bar{Q} \\ B\cdot w^{IV} &= \bar{q} \equiv p \end{aligned}}$$

$$B = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$-\bar{M}_x = \frac{-M_x}{b}$$

$\bar{M}_x$ ... Biegemoment pro Längeneinheit

BRUNNEN

- d. h. DGL 4. Grades ⇝ 4 Randbedingungen zum Lösen nötig

DGL für Balken

$$EI\,w^{IV} = q(x)$$

DGL für Kreisplatte

$$\boxed{\left\{\left[\left(w'\cdot r\right)'\cdot\frac{1}{r}\right]' r\right\}'\frac{1}{r} = \frac{p(r)}{B}} \qquad \frac{d}{dr} \doteq (\,)'$$

$$B = E^{*}\cdot I^{*} = \frac{E}{1-\nu^2}\cdot\frac{h^3}{12}$$

- mit Bezugsradius a $\Rightarrow (r = a\cdot\varrho)$ dimensionslos machen

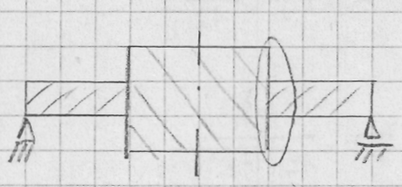
$$\Rightarrow \quad \boxed{\left\{\left[\left(w^{\circ}\cdot\varrho\right)^{\circ}\cdot\frac{1}{\varrho}\right]^{\circ}\varrho\right\}^{\circ}\frac{1}{\varrho} = a^4\frac{p(\varrho)}{B}} \qquad \frac{d}{d\varrho} \triangleq (\,)^{\circ}$$

nach 4maligem Integrieren: $(p = \text{konst})$

$$\boxed{w = \frac{pa^4}{64B}\varrho^4 + \frac{k_1}{4}\varrho^2(\ln\varrho - 1) + \frac{k_2}{4}\varrho^2 + k_3\ln\varrho + k_4}$$

- gilt für $w \ll h$, isotrope Platten, rotationssymmetr. Belastung
- 4 RB nötig um diese allg. Lsg anzupassen
- Vergleich: Scheibe → 2 RB
  Platte → 4 RB
- Bezugsradius da wählen wo die meisten RB vorkommen

Kreisplatten veränderlicher Dicke



- jede Platte konstanter Dicke hat 4 Unbekannte
  → 8 RB & ÜB nötig

Bsp $\bar{M}_r = 0$ $\quad w^{\circ} = 0$

$w = 0$ $\quad Q = -\dfrac{F}{2\pi a\varrho}$

$w_1 = w_2$; $w_1^{\circ} = w_2^{\circ}$

$\bar{Q}_1 = \bar{Q}_2$; $\bar{M}_{r1} = \bar{M}_{r2}$

Technische Universität Berlin
Institut für Konstruktion, Mikro- und
Medizintechnik - Konstruktionslehre

Professor Dr.-Ing. H. Mertens
Dipl.-Ing. B. Kloss

SS 04

Analytische Übung zur Vorlesung "Beanspruchungsgerechtes Konstruieren II"

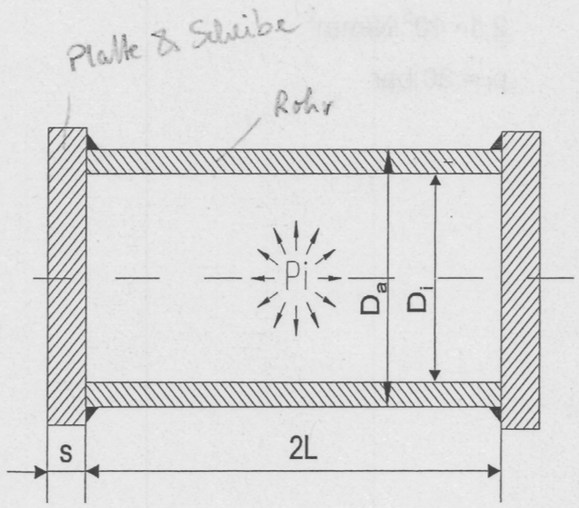
Übung Nr.: 10

Thema: Rohre, zusammengesetzte Bauteile

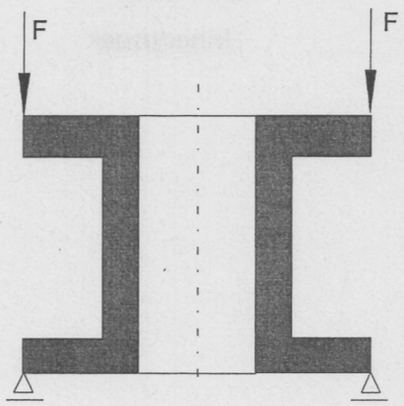
Ausgabe: **01.07.04** Abgabe: -

Aufgabe 10.1

Rotationssymmetrische Bauteile können aus Scheiben, Platten und Rohren bestehen. Für die Untersuchung zusammengesetzter Bauteile sind Rand- und Übergangsbedingungen zwischen analytisch berechenbaren Grundelementen aufzustellen. Stellen Sie für die folgenden Bauteile die Gleichungen für die darin auftretenden Spannungen auf und geben Sie die Rand- und Übergangsbedingungen an.



A) Druckbehälter



B) Hülse

Aufgabe 10.2

Bei dem in Aufgabe 1 behandelten Druckbehälter sollen die Deckel als starr betrachtet werden. Berechnen Sie unter dieser Voraussetzung

a) den Verlauf der Radiusvergrößerung w
sowie für die Anschlußstelle zwischen Deckel und Rohr (x=L)
b) die Biegemomente M_x und M_φ,
c) die Normalkräfte S_x und S_φ,
d) die Querkraft Q und
e) die Normalspannungen σ_x und σ_φ auf der Rohrinnenseite.
f) Stellen Sie den axialen Verlauf von w graphisch dar !

Gegeben:

Rohrinnendurchmesser	$D_i = 600$ mm
Rohraußendurchmesser	$D_a = 620$ mm
Rohrlänge	$2L = 1000$ mm
Querkontraktion	$\nu = 0{,}3$
E -Modul	$2{,}1 \cdot 10^5$ N/mm^2
Innendruck	$p_i = 30$ bar

1.7.04

Rohre, zusammengesetzte Bauteile

Bislang 2 Grundelemente:

- Rotationssymm. Scheibe: DGL 2.0

$$\sigma_r(r) = \dots$$

$$\sigma_\varphi(r) = \dots$$

- Rotationssymm. Kreisplatte: DGL 4.0

$$\sigma_r(r) = \dots$$

$$\sigma_\varphi(r) = \dots$$

$$w(r) = \dots$$

neues Element: Rohr DGL 4.0
("biegesteife Kreiszylinderschale")

allgemeine Lösung Rohr:

$$w(x) = w_0 + \underline{K_1} e^{Kx} \sin(Kx - \underline{\varphi_1}) + \underline{K_2} e^{-Kx} \sin(Kx - \underline{\varphi_2})$$

w_0: partikuläre Lsg $\hat{=}$ "Eigenkreisfrequenz"

4 Integrationskonstanten $\Rightarrow$ RB!

Zugspannung:

$$\sigma_x(x) = \frac{\bar{S}_{x0}}{h} - \frac{B}{h^3/12} w''(x) \cdot z$$

$\bar{S}_{x0}$: Term aus Zug

$w''(x)$: Term aus Biegung $\left(\frac{M_b}{I_b} \cdot y\right)''$

z: Höhenkoordinate $-\frac{h}{2} \dots +\frac{h}{2}$

Umfangsspannung:

$$\sigma_\varphi(x) = \frac{\nu \bar{S}_{x0}}{h} + \frac{B}{h^3/12} \left[\frac{w(x)}{a}(1-\nu^2) - \nu\, w''(x) \cdot z\right]$$

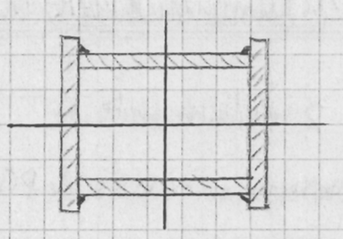
BRUNNEN
Papier und viel mehr

Radialspan σ_r spielen keine Rolle weil dünnwandig ($h \ll L$)

Aufgabe 10.1 A)

Woraus besteht das Bauteil?

1	Rohr	4	RB & ÜB
1	Platte	4	L = "constraints"
1	Scheibe	2	
		10	

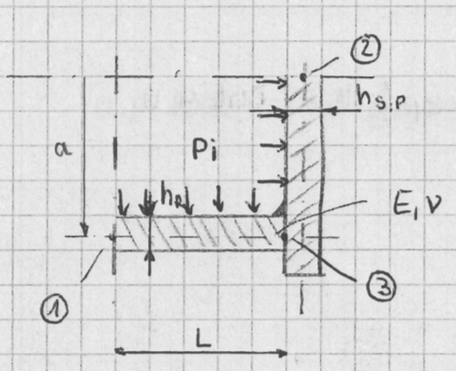


Symmetrie nutzen!

$$a = \frac{D_a + D_i}{4}$$

$$h_{SP} = s$$

$$h_R = \frac{D_a - D_i}{2}$$

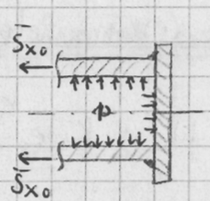


1/4 des Systems

Los gehts!

$$K = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{a^2 h^2}}$$

$$w_0 = \frac{a^2}{Eh}\left(p - \nu \frac{\bar{S}_{x0}}{a}\right)$$



$$\bar{S}_{x0}\, 2\pi a = p \frac{\pi}{4} D_i^2$$

$$\bar{S}_{x0} = \frac{p D_i^2}{8a}$$

$h \ll a \rightsquigarrow a \approx D_i$

$$= \frac{p}{2} a$$

① Symmetrieschnitt am Rohr:

$w'_R = 0$ wg. Symmetrie

$\bar{Q}_R = 0$ wg. Symmetrie

② Symmetrieschnitt Platte/Scheibe

$V_{rS} = 0$

$w'_P = 0$ wg. Symmetrie

$\bar{Q}_P = 0$ wg. Symmetrie

③ Biegesteife Ecke:

weitere Vorzeichenstudie erforderlich

$\bar{M}_{r,P} = \bar{M}_{x,R}$ $\quad |w'_R| = |w'_P|$

$(\bar{S}_{x_0} = \bar{Q}_P)$ ✓ bringt aber nix $\quad v_{R,S} = w_R$

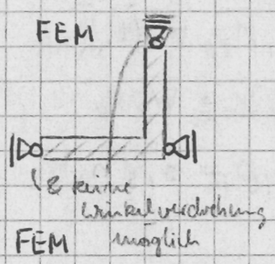
$\bar{Q}_R = \sigma_{rs} \cdot h_{SP}$

z.B. $w_P = 0$ (Starrkörperfreiheit)

(alternativ ① $v_{xR} = 0$)

Alternative: $v_{xR} = 0$ ① oder $w_P = 0$ ③

③ Variante für Prüfung (analytisch)



& keine Winkelverdrehung möglich

③ $w_P = v_{xR}$

dünnes Rohr: $v_{xR} = \frac{L}{E}(\sigma_x - \nu \sigma_\varphi)$

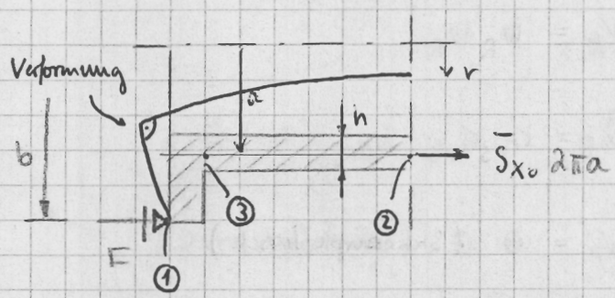
L $\frac{pa}{2h}$ L aus Kesselformel

$= \frac{L}{E} \frac{pa}{h_R}\left(\frac{1}{2} - \nu\right)$

$\Rightarrow$ nun Gleichungen für LGS aufstellen

BRUNNEN
Papier und viel mehr.

Aufgabe 10.1 B) Standardaufgabe in Prüfung



$\bar{S}_{x_0} 2\pi a$

$$\bar{S}_{x_0} = -\frac{F}{2\pi a}$$

① $w_P = 0$

$M_{rP} = 0$

$\bar{Q}_P = (-)\frac{F}{2\pi b}$

$\sigma_{rS} = 0$

② $\bar{Q}_R = 0$

$w'_R = 0$

③ $w'_P = w'_R$

$w_P = v_{xR}$

$\bar{M}_{rP} = (-)\,\bar{M}_{xR}$

$v_{rS} = w_R$

$\bar{Q}_R = \sigma_{rS}\, h_S$

Technische Universität Berlin
Institut für Konstruktion, Mikro- und Medizintechnik
FG Konstruktionslehre

Professor Dr.-Ing. H. Mertens
Dipl.-Ing. A. Linke

SS 03

15,0 2,7 fin

Analytische Übung zu den Vorlesungen

„Beanspruchungsgerechtes Konstruieren II“ und „Konstruktionstechnik II“

TEST 3 (17.07.03) : Scheibe, Platte, Rohr und zusammengesetzte Bauteile

Name: Andreas Leupelt Matr.: 194171

Gesamtpunktzahl : 20 (10 Punkte erforderlich zum Bestehen des Tests)

1. **(10 Punkte)** Im Folgenden sind die allgemeinen Gleichungen zur Beschreibung des Spannungs- und Verschiebungszustandes rotationssymmetrischer Scheiben angegeben.

$$\sigma_r(r) = A - \frac{B}{r^2} - \frac{3+\nu}{8}\cdot\rho\cdot r^2\cdot\omega^2$$

$$\sigma_\varphi(r) = A + \frac{B}{r^2} - \frac{1+3\cdot\nu}{8}\cdot\rho\cdot r^2\cdot\omega^2$$

$$E\cdot v_r(r) = \left(A\cdot(1-\nu) + B\cdot(1+\nu)\cdot\frac{1}{r^2} - \frac{1-\nu^2}{8}\cdot\rho\cdot r^2\cdot\omega^2 \right)\cdot r$$

Abb. 1 zeigt eine Scheibe (Durchmesser D, Dicke h), die mit der Drehzahl n rotiert.

a) Geben Sie die Randbedingungen der Scheibenlösung für diesen Fall an und bestimmen Sie die Integrationskonstanten der Scheibenlösung für dieses Bauteil !

b) Zeichnen Sie qualitativ die Verläufe der Radial- und Umfangsspannung als Funktionen des Radius r in das Diagramm nach Abb. 2 ein !

c) Bestimmen Sie die maximale in der Scheibe auftretende Mises-Vergleichsspannung und die Radialverschiebung des Außenrandes der Scheibe !

Daten der Scheibe :

$D = 2000\ mm$ = 2m
$h = 100\ mm$ = 0,1m
$n = 3000\ \mathrm{min}^{-1}$
$\rho = 7{,}9\ g/cm^3$ = 7900 kg/m³
$E = 2{,}1\cdot10^5\ N/mm^2$
$\nu = 0{,}27$

E = 2,1 · 10¹¹ N/m²

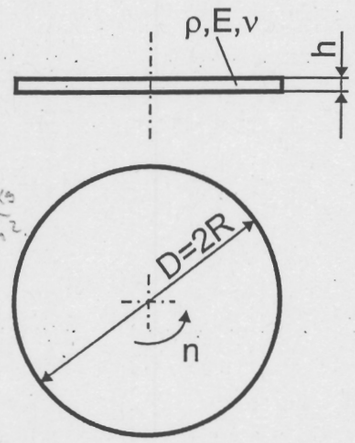


Abb. 1: Rotierende Scheibe

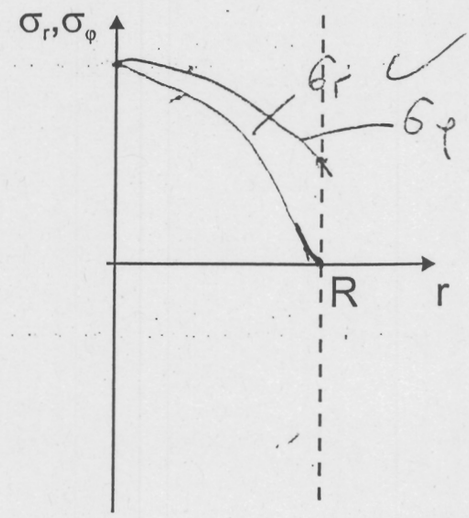


Abb. 2: Spannungsdiagramm

2. **(10 Punkte)** Abb. 3 zeigt ein zusammengesetztes Bauteil, welches durch die Ringlast F (umfangsbezogen) belastet und auf einem ringförmiges „Loslager" gelagert ist.

   a) Kennzeichnen Sie in Abb. 3, aus welchen Einzelkomponenten (Rohre / Scheiben / Platten) dieses Bauteil für eine Berechnung des Verschiebungs-/Spannungszustandes zu modellieren ist ! Geben Sie an, wieviele Rand-/Übergangsbedingungen insgesamt für die Berechnung anzugeben sind !

   b) Geben Sie alle erforderlichen Rand- und Übergangsbedingungen an ! (**Hinweis :** Es ist auf eindeutige und allgemein übliche Bezeichnungen zu achten und es sind ggf. ergänzende Erklärungen / Skizzen beizufügen !)

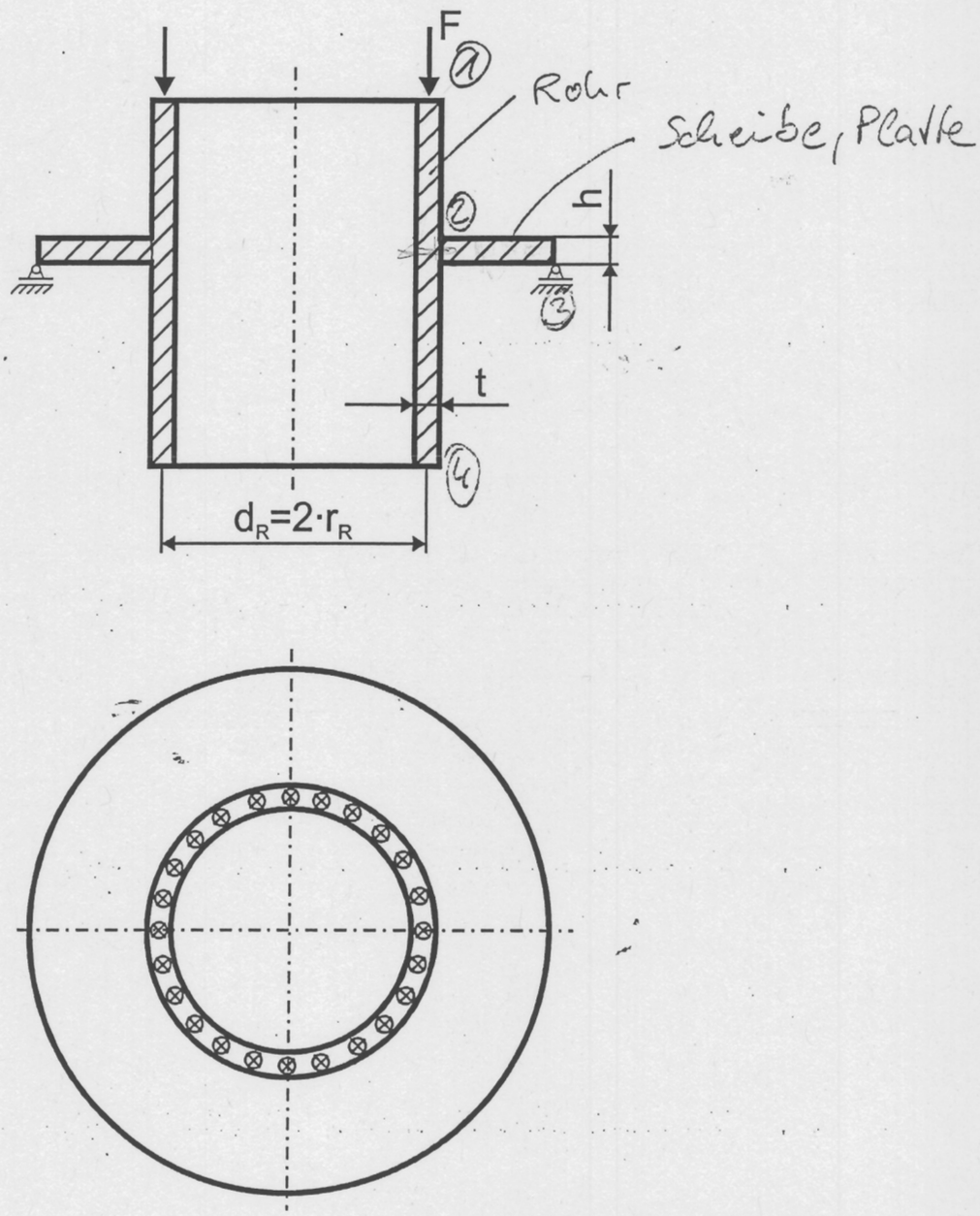


Abb. 3: Zusammengesetztes Bauteil

Andreas Leupelt
134171

3. Test Beko II

Aufgabe 1

a) $v_r(r=0) = 0$ ✓ $\quad \sigma_r(r=R) = 0$ ✓

$$E \cdot v_r(r) \cdot r = A(1-\nu) \cdot r^2 + B(1+\nu) - \frac{1-\nu^2}{8} \cdot \rho \cdot r^4 \cdot \omega^2$$

$v_r(0) = 0$

$\Rightarrow \quad 0 = B \cdot (1+\nu) \quad \Rightarrow \quad B = 0$ ✓

$$\Rightarrow \sigma_r(r) = A - \frac{3+\nu}{8} \cdot \rho \cdot r^2 \cdot \omega^2$$

$$\sigma_r(R) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = A - \frac{3+\nu}{8} \rho \cdot R^2 \cdot \omega^2$$

$$A = \frac{3+\nu}{8} \cdot \rho \cdot R^2 \cdot \omega^2 \quad \text{mit} \quad \omega = 2\pi \cdot n \quad A = 318{,}7 \frac{N}{mm^2}$$ ✓

c) $\sigma_{vm} = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_\varphi^2 - \sigma_r \cdot \sigma_\varphi + 3\tau_{r\varphi}^2}$ ✓

$$v_r(R) = \frac{1}{E}\left(\frac{3+\nu}{8} \cdot \rho R^2 \cdot \omega^2 (1-\nu) - \frac{1-\nu^2}{8} \cdot \rho \cdot R^2 \omega^2\right) \cdot R$$

$$= 0{,}000677\ m = 0{,}0677\ mm$$ ✓

σ_{vm} bei $r = 0$

$\sigma_r(0) = A \qquad \sigma_\varphi(0) = A$

$$\sigma_{vm} = \sqrt{A^2 + A^2 - A^2} = A$$ ✓

$\sigma_{vm} = 318{,}7 \frac{N}{mm^2}$ ✓

Aufgabe 2

a) Rohr: 4 RB/üD
Scheibe: 2 RB/üB
Platte: 4 RB/üB
⇒ 8 RB/üB
10, aber auch doppelt

2. Rohr (-1)

b) ① $M_{Rohr} = 0$ ✓ $\overline{Q}_{Rohr} = 0$ ✓

② $w_{Rohr} = v_{r,Scheibe}$ ✓
$w'_{Rohr} = w'_{Platte}$ ✓
$\overline{Q}_{Platte} = F$ ✓

③ $w_{Platte} = 0$ ✓

④ $M_{Rohr} = 0$ ✓ $\overline{Q}_{Rohr} = 0$ ✓

6 fehlen (-4)

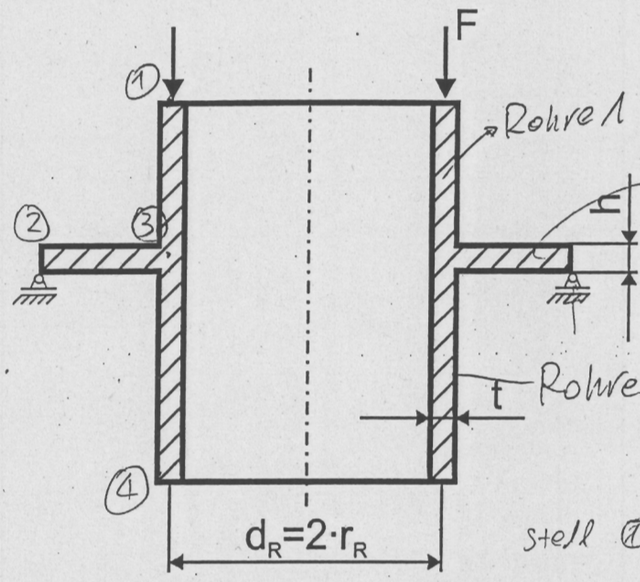
Schade!

2. **(10 Punkte)** Abb. 3 zeigt ein zusammengesetztes Bauteil, welches durch die Ringlast F (umfangsbezogen) belastet und auf einem ringförmiges „Loslager" gelagert ist.

a) Kennzeichnen Sie in Abb. 3, aus welchen Einzelkomponenten (Rohre / Scheiben / Platten) dieses Bauteil für eine Berechnung des Verschiebungs-/Spannungszustandes zu modellieren ist ! Geben Sie an, wieviele Rand-/Übergangsbedingungen insgesamt für die Berechnung anzugeben sind !

b) Geben Sie alle erforderlichen Rand- und Übergangsbedingungen an ! (**Hinweis :** Es ist auf eindeutige und allgemein übliche Bezeichnungen zu achten und es sind ggf. ergänzende Erklärungen / Skizzen beizufügen !)

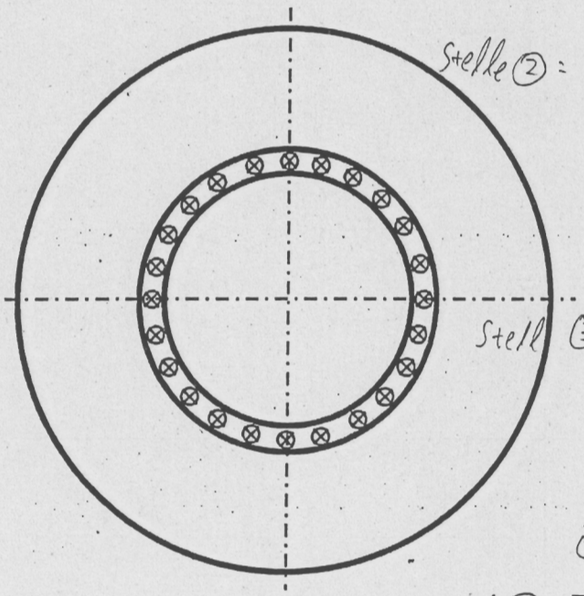
Rohre 1 : 4
R 2 : 4
Platt : 4 ✓
Scheibe : 2
insgesamt 14



Rohre ① =
$\bar{S}_{x0,1} = -F$
$p = 0$

Rohr ②
$\bar{S}_{x0} = 0$
$p = 0$

Stelle ①: $\bar{Q}_{R,1} = 0$ ✓
$\bar{M}_{xR1} = 0$ ✓



Stelle ②: $W_p = 0$ ✓
$M_{x,p} = 0$ ✓
$Q_p = -F(\cdot)\frac{d}{D}$ (-0,25)
$\bar{T}_{r,s} = 0$ ✓

Stelle ③ $W_{R1} = W_{R2} = V_{r,s}$ ✓ ✓ 2 GL
$W'_{R1} = W'_{R2} = W'_p$ ✓ ✓ ← 2 G
$M_{x,R1} + M_{x,R2} + M_{r,p} = 0$ ✓
$\bar{Q}_{R1} + \bar{Q}_{R2} + \bar{T}_{r,s} \cdot h = 0$ ✓

Stelle ④ $\bar{Q}_{R2} = 0$ ✓
$\bar{M}_{R2x} = 0$ ✓

Pawe

Abb. 3: Zusammengesetztes Bauteil

insgesamt 14 GL.
für 14 Unbekannt.

Lösung 3. Tut BEKO II

1 a) $r = 0 \quad \sigma_r = \sigma_\varphi$

$$\Rightarrow A - \frac{B}{r^2} - \frac{3+\nu}{8} \varrho r^2 \omega^2 = A + \frac{B}{r^2} - \frac{1+3\nu}{8} \varrho r^2 \omega^2$$

$$0 = \frac{2B}{r^2} \quad \rightsquigarrow \quad \underline{B \overset{!}{=} 0}$$

$\frac{2B}{r^2} \to 0$

$r = R \quad \sigma_r = 0$

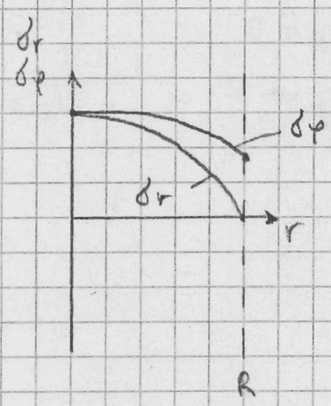
$$\Rightarrow A - \frac{3+\nu}{8} \varrho R^2 \omega^2 = 0$$

$$\underline{A = \frac{3+\nu}{8} \varrho R^2 \omega^2} \quad \text{mit } \omega = 2\pi n \text{ bzw. } \frac{n\pi}{30}$$

$$A = 318{,}7 \ \frac{N}{mm^2}$$

$$= 3{,}187 \cdot 10^8 \ \frac{N}{m^2}$$

b)



c) $$V_r(r=R) = \frac{R}{E} \left(A(1-\nu) - \frac{1-\nu^2}{8} \varrho r^2 \omega^2 \right) = 0{,}6775 \text{ mm}$$

maximale Missvergleichsspannung in der Mitte

$\sigma_r(r=0) = A \quad \sigma_\varphi(r=0) = A$

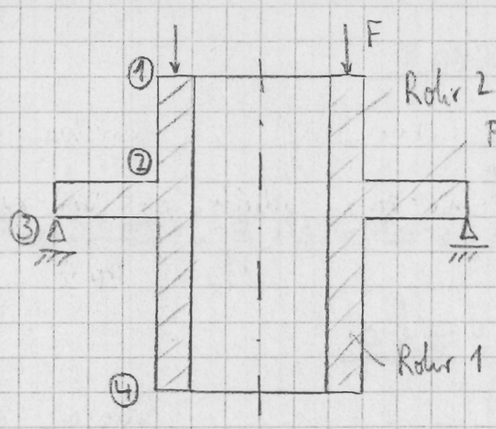
$$\sigma_v = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

$\sigma_1 = \sigma_r \quad \sigma_2 = \sigma_\varphi \quad \sigma_3 = 0$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{A^2 + A^2} = \frac{\sqrt{2} A}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{A}}$$

BRUNNEN
Papier und viel mehr

2a)



		RB/ÜB
⇒	2 Rohre	8
	1 Platte	4
	1 Scheibe	2
		14

Es sind 14 RB/üB notwendig

b) ④ $(S_{x0} = 0)$

$\bar{M}_{x,R} = 0$ ✓

$\bar{Q}_R = 0$ ✓

③ $w_p = 0$ ✓

$\delta_{r,S} = 0$ ✓

$M_{r,p} = 0$ ✓

$\bar{Q}_p = F$ ✓

② $\bar{M}_{r,P} + \bar{M}_{x,R1} + \bar{M}_{x,R2} = 0$ ✓

$\bar{Q}_{R1} + \bar{Q}_{R2} + \delta_{r,S} \cdot h = 0$ ✓

$v_{r,S} = w_{R1} = w_{R2}$ ✓

$w_{R1} = w'_{R2} = w'_P$ ✓

$(v_{x,R1} = v_{x,R2} = w_P)$

① $\bar{Q}_R = 0$ ✓

$S_{x0} = F$ ✓

$(M_{x,R} = 0)$

Technische Universität Berlin
Institut für Konstruktion, Mikro- und Medizintechnik
FG Konstruktionslehre

Professor Dr.-Ing. H. Mertens
Dipl.-Ing. B. Kloss

SS 04

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
14. JULI 2004
Konstruktionslehre
Prof. Dr.-Ing. H. Mertens

Analytische Übung zu den Vorlesungen

„Beanspruchungsgerechtes Konstruieren II“ und „Konstruktionstechnik II“

TEST 3 (08.07.04) : Scheibe, Platte, Rohr und zusammengesetzte Bauteile

Name: David Bieniek Matr.: 206107 3,5/10

Gesamtpunktzahl : 10 (5 Punkte erforderlich zum Bestehen des Tests)

1. **(10 Punkte)** Abb. 1 zeigt ein zusammengesetztes Bauteil, welches durch die Ringlast F (umfangs-bezogen) belastet und auf einem ringförmiges „Loslager“ gelagert ist.
   a) Kennzeichnen Sie in Abb. 1, aus welchen Einzelkomponenten (Rohre / Scheiben / Platten) dieses Bauteil für eine Berechnung des Verschiebungs-/Spannungszustandes zu modellieren ist ! Geben Sie an, wieviele Rand-/Übergangsbedingungen insgesamt für die Berechnung anzugeben sind !
   b) Geben Sie alle erforderlichen Rand- und Übergangsbedingungen an ! (**Hinweis :** Es ist auf eindeutige und allgemein übliche Bezeichnungen zu achten und es sind ggf. ergänzende Erklärungen / Skizzen beizufügen !)

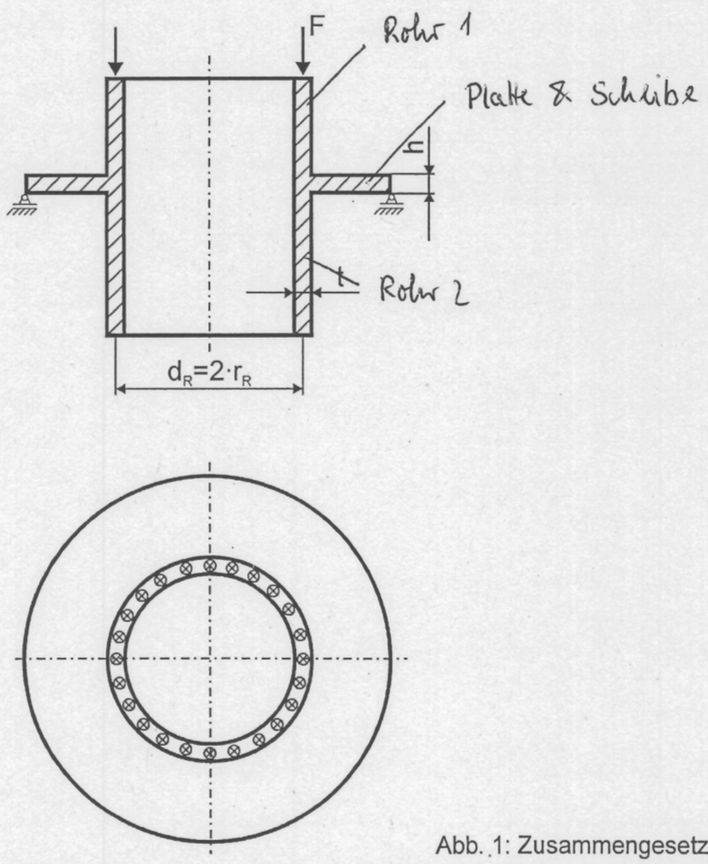
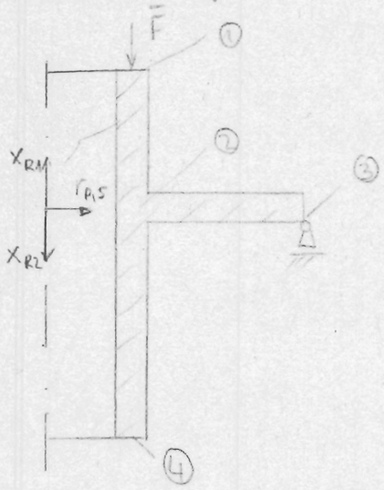


Abb. 1: Zusammengesetztes Bauteil

Benjamins Lösung



① $(\bar{S}_{X0,R1} = -\bar{F})$

$\bar{Q}_{R1} = 0$

$\bar{M}_{XR1} = 0$

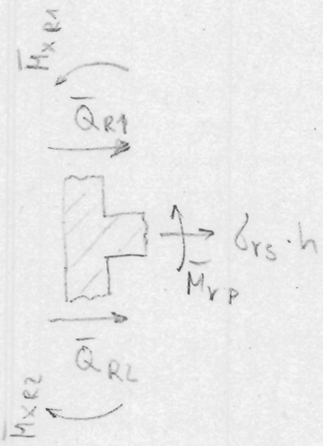
④ $\bar{Q}_{R2} = 0$

$\bar{M}_{XR2} = 0$

$\bar{S}_{X0,R2} = 0$

③ $\bar{M}_{rP} = 0$

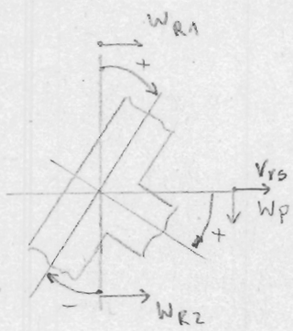
$b_{r,S} \cdot h = 0$



So müssen die Kräfte & Momente auf Grund des KOS angetragen werden

② $0 = \bar{Q}_{R1} + \bar{Q}_{R2} + b_{rS} \cdot h$

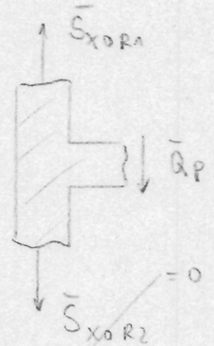
$0 = \bar{M}_{XR1} - \bar{M}_{XR2} + \bar{M}_{rP}$



$|w'_{R1}| = |w'_{R2}| = |w_P'|$ $\quad w'_{R1} = w'_P$

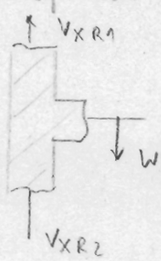
$w'_{R1}' = -w'_{R2}$

$w_{R1} = w_{R2} = v_{rS}$



$\bar{Q}_P = S_{X0R1}$

Festlegung der Verschiebungsfelder:



$w_P = -v_{XR1}$

$w_P = v_{XR2}$

Emil Bienik
206107

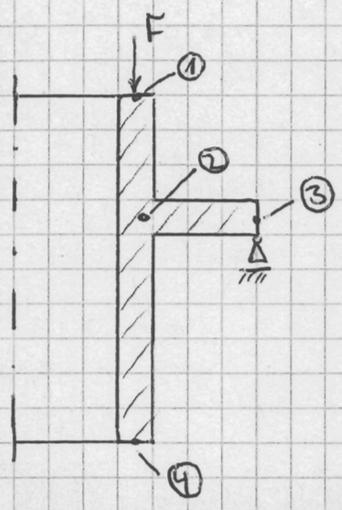
3. Test BK II

a)

Rohr 1	4
Platte	4
Scheibe	2
Rohr 2	4
	14

Es sind 14 Rand- & Übergangsbedingungen anzugeben

b)



R1 ... Rohr 1
R2 ... Rohr 2
P ... Platte
S ... Scheibe

Rand- & Übergangsbedingungen für die einzelnen Stellen

④
$\bar{Q}_{R2} = 0$
$\bar{M}_{x,R2} = 0$
$\bar{S}_{x0,R2} = 0$

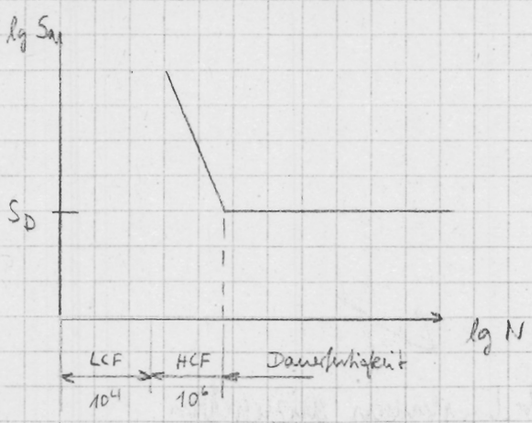
①
$\bar{Q}_{R1} = 0$
$\bar{M}_{x,R1} = 0$
$\bar{S}_{x0,R1} = F$

$\bar{S}_{x0,1} = \bar{Q}_P$ (-0,5)

③
$w_P = 0$
$\bar{M}_{r,P} = 0$
$\delta_{r,S} = 0$

②
$v_{r,S} = w_{R1} = w_{R2}$
$|w'_{R1}| = |w'_P| = |w'_{R2}|$
$\bar{M}_{x,R1} + \bar{M}_{x,R2} + \bar{M}_{r,P} = 0$
~~$\bar{Q}_{R1} + \bar{Q}_{R2} + \bar{Q}_P = 0$~~
$\bar{Q}_{R1} + \bar{Q}_{R2} + \delta_{r,S} \cdot h = 0$

BRUNNEN
Papier und viel mehr.

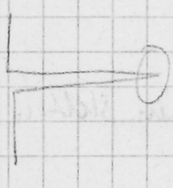


- kfz-Werkstoffe haben keine ausgeprägte Dauerfestigkeit

$\alpha_K \propto \sigma$ (Schwelle zw. schwach- / scharfgekerbt)

↙ Dauerfest. mit Kerbformzahldiagr.

↘ Bruchmechanik
↳ (oder über Neuberscher Ersatzradius) *

* 

Rißspitze wird durch plastifizieren (weil duktiles Werkstoff) ausgerundet

$$\varsigma = \varsigma_{Grenz} + s \cdot \varsigma_{Neuber}$$

Rohre (biegesteife Kreiszylinderschale)

- Herleitung über den „gebetteten Balken"
- die Bettung beim Rohr kommt aus den Umfangsspannungen die beim Aufweiten des Rohres entstehen
  → aus den Umfangslasten resultiert eine Steifigkeit (≙ Bettung) die z.B. dem Innendruck entgegenwirkt
- außerdem wird die Aufweitung des Rohres durch Innendruck p durch Querkontraktion (Einschnürung) eine axiale Last gemindert
- auch bei Rohr DGL 4. Grades → 4 Unbekannte → 4 RB

<u>allg. Lösung für das Rohr</u>

$$w(x) = w_0 + k_1 e^{\kappa x} \sin(\kappa x - \varphi_1) + k_2 \cdot e^{-\kappa x} \sin(\kappa x - \varphi_2)$$

→ 4 Unbekannte: $k_1, \varphi_1, k_2, \varphi_2$

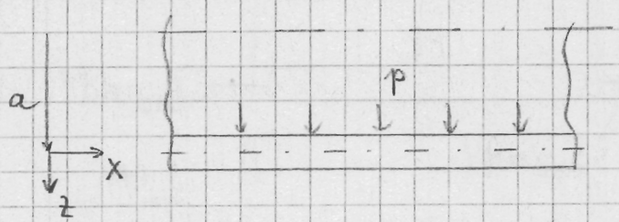
Zugspannung: $\sigma_x(x) = \frac{\bar{s}_{x0}}{h} - \frac{B}{h^3/12} w''(x) \cdot z$

„Zug" „Biegung"

Umfangsspannung:

$$\sigma_y(x) = \frac{\nu \bar{s}_{x0}}{h} + \frac{B}{h^3/12} \left[\frac{w(x)}{a} (1-\nu^2) - \nu w''(x) \cdot z \right]$$

Radialspannungen werden wegen $h \ll L$ vernachlässigt



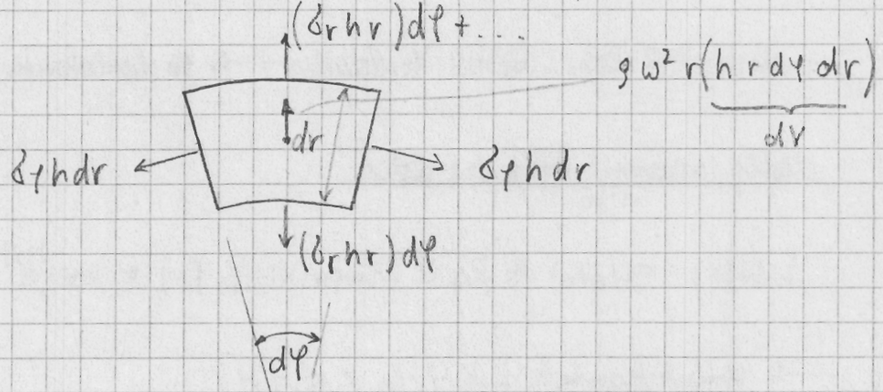
BRUNNEN

zusammengesetzte Bauteile

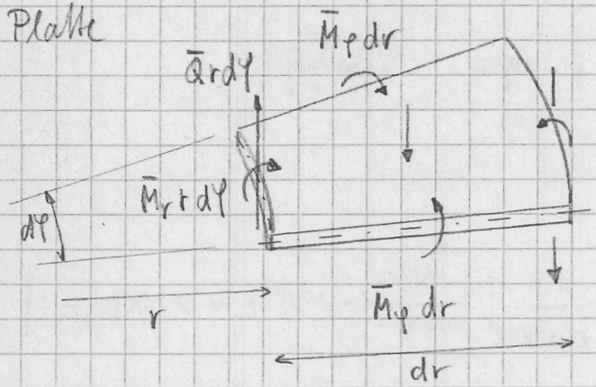
- woraus besteht Bauteil ? ~ Anzahl Scheiben / Platten / Rohre
  ~ Anzahl nötiger RB & ÜB
- Symmetrie des Bauteils nutzen !!

Wiederholung:

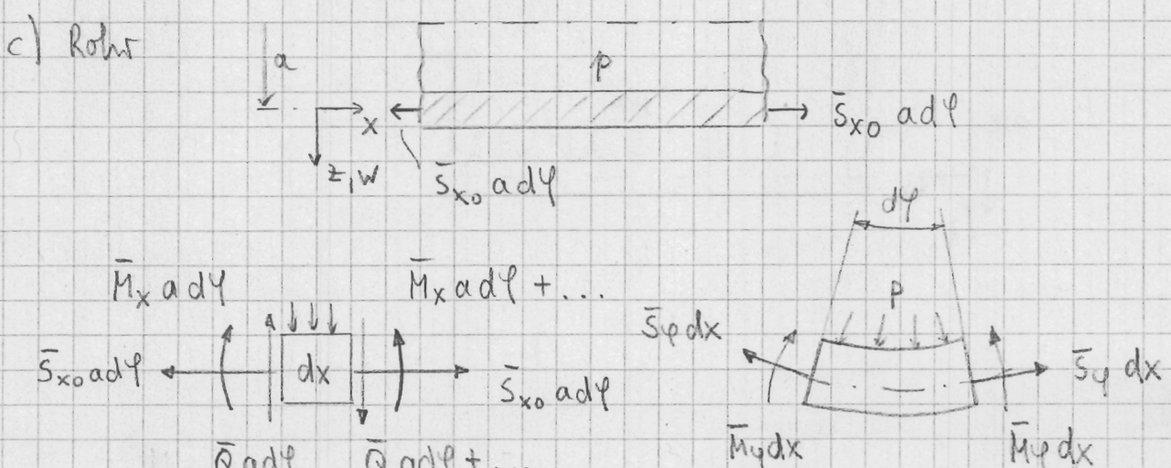
a) Scheibe



b) Platte



c) Rohr



Test 5 / Platte

Technische Universität Be
Institut für Konstruktion, Mikro- und
Medizintechnik - Konstruktionslehre

Professor Dr.-Ing. H. Mertens
Dipl.-Ing. B. Kloss

Analytische Übung zu den Vorlesungen
„Beanspruchungsgerechtes Konstruieren II“ und „Konstruktionstechnik II“

Name: Matr. Nr.:

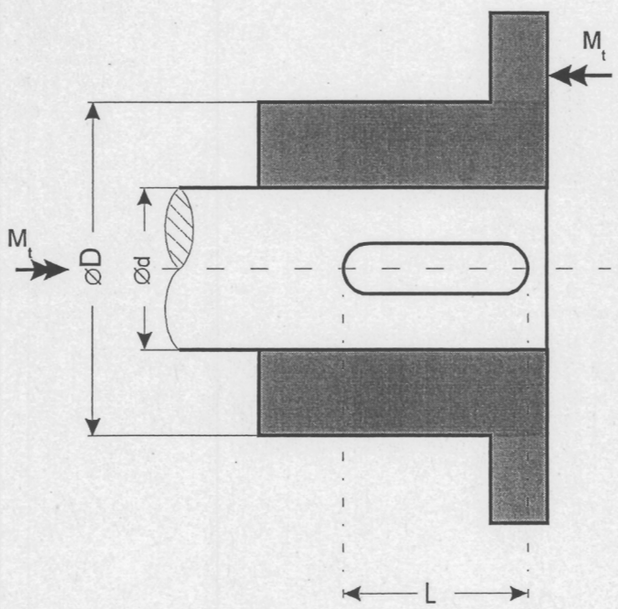
Übung Nr.: 11

Thema: Kraftleitungsprobleme

Ausgabe: **08.07.2004**

1. Aufgabe

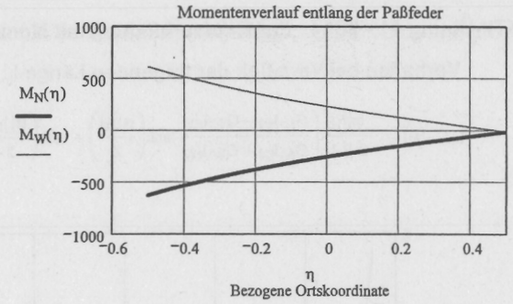
Bestimmen Sie die nichtlineare Lastverteilung zwischen Welle, Paßfeder und Nabe nach einem Ersatzfedermodell analog zur Klebeverbindung. Berechnen Sie das übertragbare Drehmoment in der gezeigten Anordnung mit Lastdurchleitung.

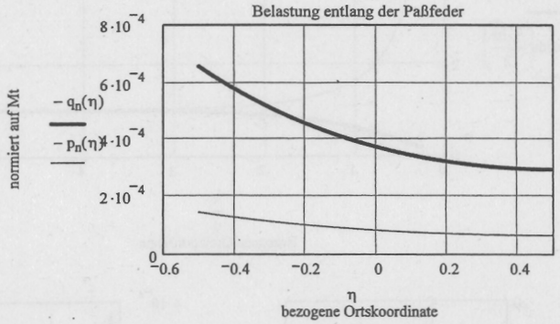


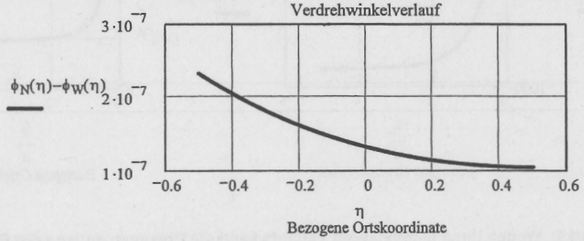
Daten:

d = 70mm
D = 100 mm
Paßfeder DIN 6885 – A 20 x 12 x 90
Paßfedernuttiefe t_1 = 7,5mm

BKII-/KTII-Übung 11 - SS04: Paßfederverbindung mit Momentenumlenkung



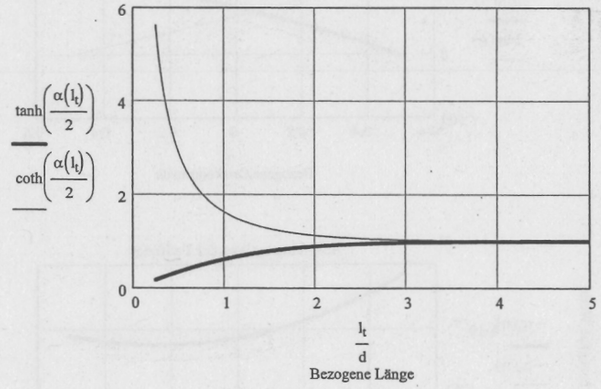


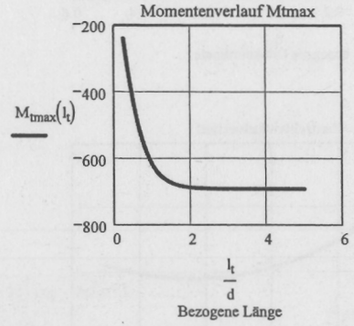


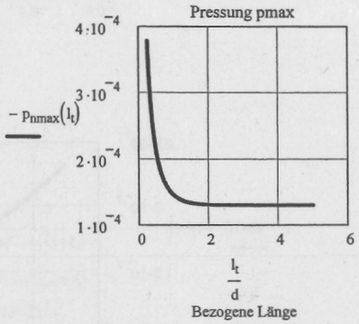
BKII-/KTII-Übung 11 - SS04: Paßfederverbindung mit Momentenumlenkung

Verhalten bei Variation der tragenden Länge:

$$q_{nmax}(l_t) := -\frac{\alpha(l_t)}{2\cdot R\cdot l_t}\cdot\left(\tanh\left(\frac{\alpha(l_t)}{2}\right)+\coth\left(\frac{\alpha(l_t)}{2}\right)\right)$$

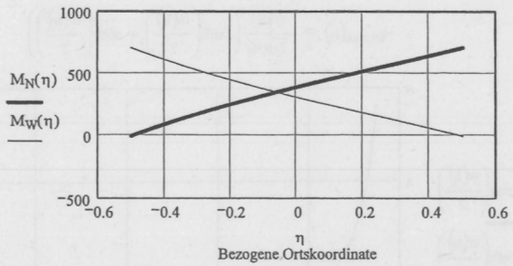


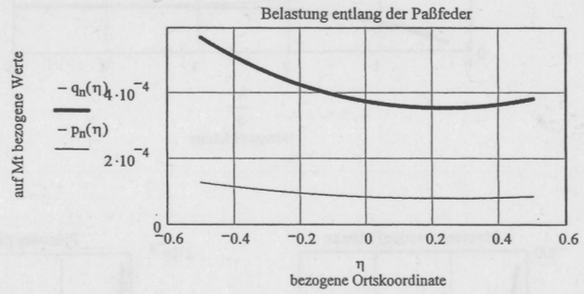


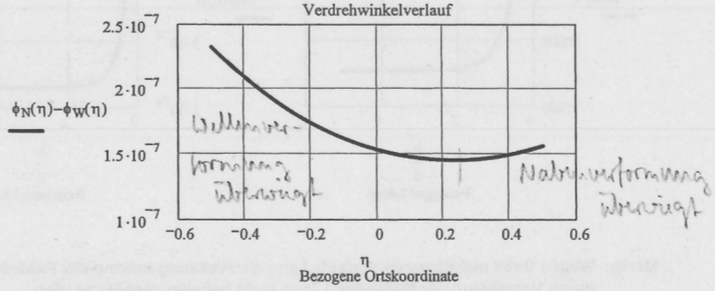


Merke: Wegen ihres nichtlinearen Verlaufs kann die Pressung entlang der Paßfeder durch Vergrößern der tragenden Länge nicht beliebig gesenkt werden.

BKII-/KTII-Übung 11 - SS04: Paßfederverbindung mit Momentendurchleitung



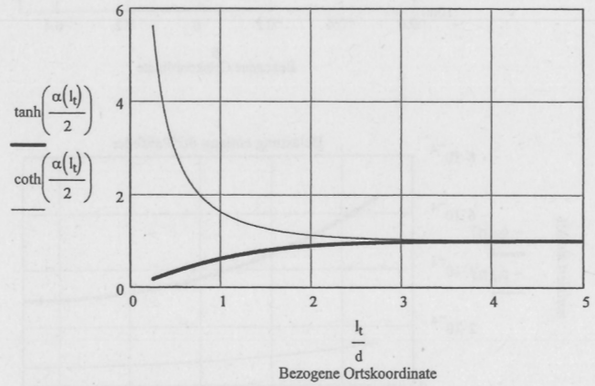


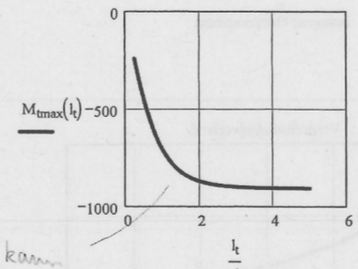


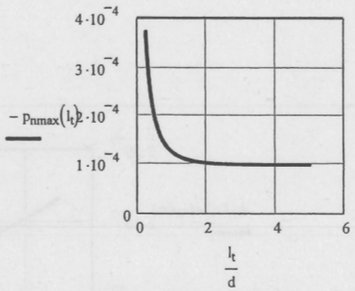
BKII-/KTII-Übung 11 - SS04: Paßfederverbindung mit Momentendurchleitung

Verhalten bei Variation der tragenden Länge l_t:

$$q_{nmax}(l_t) := -\frac{\alpha(l_t)}{2\cdot R\cdot l_t}\cdot\left(\frac{G_N\cdot I_{tN}-G_W\cdot I_{tW}}{G_N\cdot I_{tN}+G_W\cdot I_{tW}}\cdot\tanh\left(\frac{\alpha(l_t)}{2}\right)+\coth\left(\frac{\alpha(l_t)}{2}\right)\right)$$





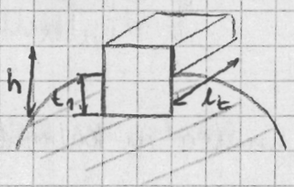


Merke: Wegen ihres nichtlinearen Verlaufs kann die Pressung entlang der Paßfeder durch Vergrößern der tragenden Länge nicht beliebig gesenkt werden.

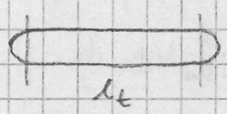
08.07.04

Kraftleitungsprobleme am Bsp von Pasfederverbindungen

Grundstudium / Dubbel: $p = \frac{F}{A} = \frac{F_t}{A_{Pass.}} = \frac{F_t}{(h-t_1)\cdot l_t}$

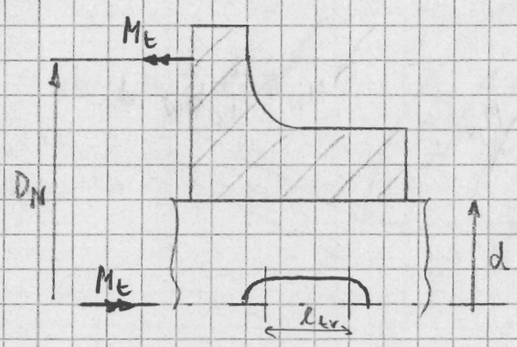


$M_t = F_t \cdot \frac{d}{2} \quad F_t = \frac{2M_t}{d}$



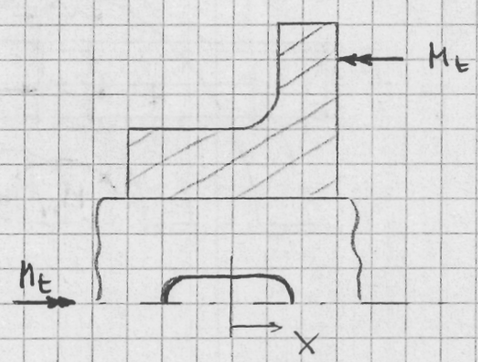
$$p = \frac{2M_t}{d(h-t_1)l_t} \Leftrightarrow M_{t\,zul} = p_{zul}\,\frac{d(h-t_1)\,l_t}{2}$$

$$\boxed{M_{t\,zul} = \frac{p_{zul}\,d\,(h-t_1)}{2}\cdot l_t}$$



Momentenumlenkung /

~ rückführung



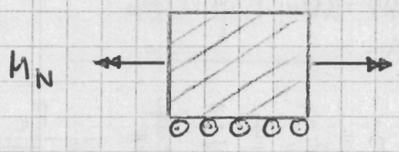
Momentendurchleitung

Um mechan. Modell zu bilden:

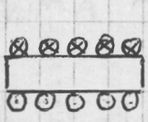
- infinitesimal kleinen Bereich freischneiden
- Schnittgrößen anbringen (Taylorentwicklung bis 1. Glied)

~> DGL aufstellen
~> DGL lösen
~> RB anpassen

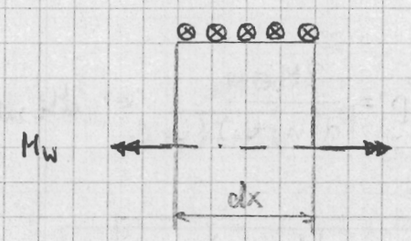
BRUNNEN
Papier und viel mehr.

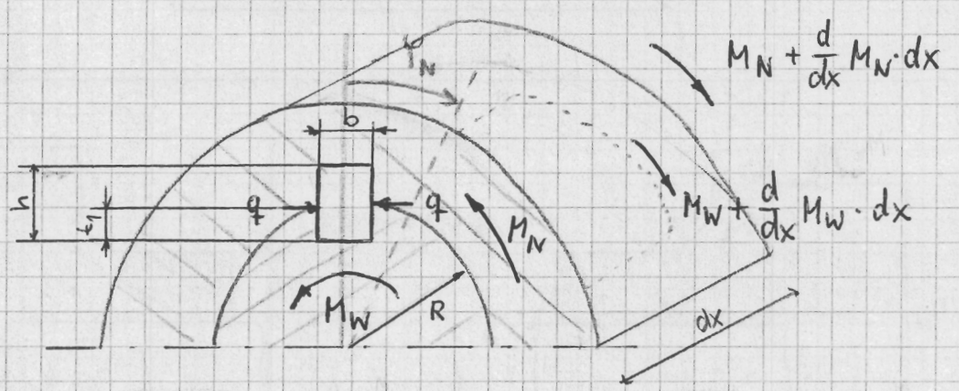


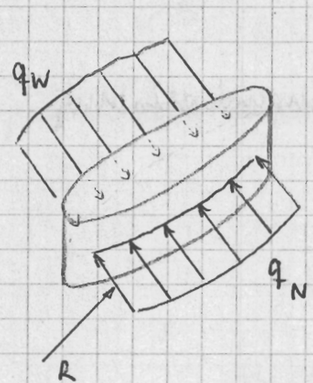
N ... Nabe
W ... Welle



analog zu Klebverbindg.





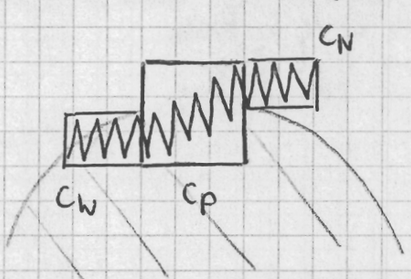


[N/m]

Annahme:

- Paßfeder als reines Druck-Element (Steifigkeit c)
- Biegeanteil wird vernachlässigt

Wir verstehen die Paß-Feder als Feder!



Resultierende Steifigkeit im Bereich der Paßfeder: $s = \frac{F}{c}$

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{c_W} + \frac{1}{c_P} + \frac{1}{c_N}$$

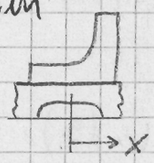
Reihenschaltung:

$$s_{ges} = s_W + s_P + s_N$$

$$= F\left(\frac{1}{c_W} + \frac{1}{c_P} + \frac{1}{c_N}\right) \stackrel{!}{=} F \cdot \frac{1}{c_{ges}}$$

Einführung einer bezogenen

$$\eta = \frac{x}{l_t}$$



$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{1}{l_t} \qquad dx = l_t\, d\eta$$

Momentengew Nabe:

$$\frac{dM_N}{dx} dx = q\, R\, dx \Leftarrow M_N + \frac{dM_N}{dx} dx - M_N - qR dx = 0$$

Kettenregel: $\frac{dM_N}{d\eta} = q\, R\, l_t$ (1)

VVR & Hooke $\qquad F = c \cdot x \qquad M_t = c_t \cdot \varphi$

$$c_t = \frac{M_t}{d\varphi_N} = \frac{G_N \cdot I_{tN}}{dx}$$

I_{tN} ... Torsions FTM der Nabe

c_t / tangential; $d\varphi_N$ "aufBau"

$$\frac{d\varphi_N}{d\eta} = \frac{M_N\, l_t}{G_N\, I_{tN}} \quad (2)$$

Paßfeder: ($\hat{=}$ Druckfeder am Radius R)

c ... längenbezogene Steifigkeit

$$c \cdot \Delta\varphi \cdot R\, dx = q\, dx$$

$$c(\varphi_N - \varphi_W)R = q \quad (3)$$

BRUNNEN
Papier und viel mehr.

Welle Momentengl.:

$$\frac{dM_W}{dx} = -q\,R$$

$$\frac{dM_W}{d\eta} = -q\,R\,l_t \qquad (4)$$

$$\frac{\partial \varphi_W}{\partial \eta} = \frac{M_W\,l_t}{G_W\,I_{tW}} \qquad (5)$$

⋮

$$\boxed{\frac{d^2q^*}{d\eta^2} - \alpha^2 q = 0} \qquad (6)$$ DGL 2.0 für q

$$\alpha = l_t \sqrt{\frac{cR^2}{G_N I_{tN}} + \frac{cR^2}{G_W I_{tW}}}$$

α ... Ähnlichkeitszahl für Passfederverbindungen

Allg. Lösung von (6): $q(\eta) = A\cosh(\alpha\eta) + B\sinh(\alpha\eta)$

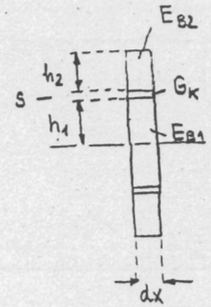
(1) $\frac{dN_2}{dx} = \tau b$

(2) $\frac{dV_2}{dx} = \frac{N_2}{h_2 \cdot b \, E_{B2}}$

(3) $\frac{V_2 - V_1}{s} = \frac{\tau}{G_K}$

(4) $\frac{dN_1}{dx} = -\tau b$

(5) $\frac{dV_1}{dx} = \frac{N_1}{h_1 \cdot b \cdot E_{B1}}$



Breite b

Elimination von N_1, N_2, V_1, V_2 ergibt mit

Überlappungslänge $l_ü$,

$$\alpha^2 = \frac{2 l_ü^2 G_K}{s \cdot h \, E_B} \quad \text{oder} \quad \alpha = l_ü \sqrt{\frac{2 G_K}{E_B \cdot s \cdot h}},$$

wobei $\frac{2}{E_B \cdot h} = \frac{1}{h_1 E_{B1}} + \frac{1}{h_2 E_{B2}}$,

eine Differentialgleichung für τ

$$\boxed{\frac{d^2\tau}{d(x/l_ü)^2} - \alpha^2 \cdot \tau = 0} \quad \text{oder} \quad \boxed{\frac{d^2\tau}{d\eta^2} - \alpha^2 \tau = 0} \quad \text{mit } \eta = \frac{x}{l_ü}$$

Lösung:

$$\tau = A \cosh(\alpha \cdot \eta) + B \sinh(\alpha \cdot \eta) \quad \text{oder}$$

$$\tau = A \cosh\left(\frac{\alpha \cdot x}{l_ü}\right) + B \sinh\left(\frac{\alpha \cdot x}{l_ü}\right)$$

Integration ergibt nach (4) bzw (1)

$$N_1 = -\frac{b \cdot l_ü}{\alpha}\left[A \sinh\left(\frac{\alpha x}{l_ü}\right) + B \cosh\left(\frac{\alpha x}{l_ü}\right)\right] + C_1$$

$$N_2 = \frac{b \cdot l_ü}{\alpha}\left[A \sinh\left(\frac{\alpha x}{l_ü}\right) + B \cosh\left(\frac{\alpha x}{l_ü}\right)\right] + C_2 .$$

Integration ergibt nach (5) bzw (2)

$$V_1 = -\frac{b \cdot l_ü^2}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{h_1 \, b \, E_{B1}}\left[A \cosh\left(\frac{\alpha x}{l_ü}\right) + B \sinh\left(\frac{\alpha x}{l_ü}\right)\right] + C_1 \cdot \frac{x}{h_1 \, b \cdot E_{B1}} + D_1$$

$$V_2 = \frac{b \, l_ü^2}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{h_2 \cdot b \, E_{B2}}\left[A \cosh\left(\frac{\alpha x}{l_ü}\right) + B \sinh\left(\frac{\alpha x}{l_ü}\right)\right] + C_2 \cdot \frac{x}{h_2 \cdot b \, E_{B2}} + D_2$$

Eingesetzt in (3) ergibt die Forderungen (Überbestimmung würde weg machen)

$$C_2 \cdot \frac{1}{h_2 \cdot b \cdot E_{B2}} - C_1 \cdot \frac{1}{h_1 \, b \, E_{B1}} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{C_2}{h_2 E_{B2}} - \frac{C_1}{h_1 E_{B1}} = 0$$

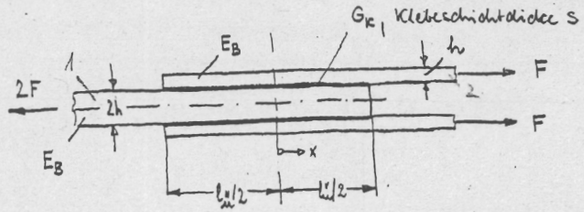
$$D_1 - D_2 = 0$$

Also für $h_1 = h_2 = h$ und $E_{B1} = E_{B2} = E_B$

$$C_1 = C_2 = C$$

$$D_1 = D_2 = D$$

Beispiel 1



Lösung: Es gilt $\alpha = l_ü \sqrt{\frac{2G_K}{E_B \cdot s \cdot h}}$ sowie $C_1 = C_2 = C$ und $D_1 = D_2 = 0$ wählbar

Randbed. für $x = l_ü/2$ ergibt (a) $N_2 = F$ und (b) $N_1 = 0$

$x = -l_ü/2$ (c) $N_2 = 0$ und ($N_1 = F$)

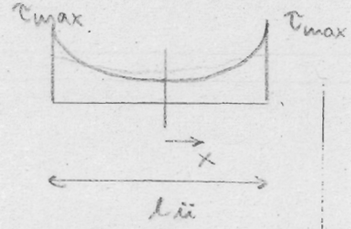
Bestimmung der Konstanten:

(b): $-\frac{b \cdot l_ü}{\alpha}\left[A \sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right) + B \cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right] + C = 0$

(c): $\frac{b \cdot l_ü}{\alpha}\left[-A \sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right) + B \cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right] + C = 0$

(b)-(c): $-\frac{b \cdot l_ü}{\alpha}\left[B \cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right) + B \cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right] = 0 \quad \Rightarrow \boxed{B = 0}$

↷ $\tau(x)$ symmetr.



Womit $C = A \frac{b \cdot l_ü}{\alpha} \sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

(a): $F = \frac{b \cdot l_ü}{\alpha} A \sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right) + C$

oder $A = \frac{\alpha}{2 \cdot b \cdot l_ü \sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \cdot F$

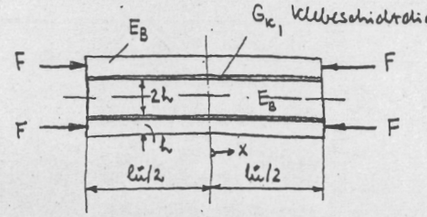
punktsymmetr.
→ punktsymm. Größe fällt raus
→ sinh fällt raus.

$$\boxed{\tau = \frac{F}{b \cdot l_ü} \cdot \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\cosh\left(\frac{\alpha x}{l_ü}\right)}{\sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}$$

$$\boxed{\tau_{max} = \frac{F}{b \cdot l_ü} \cdot \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1}{\tanh\left(\frac{\alpha}{2}\right)}} \quad \text{für } x = \pm l_ü/2$$

*

Beispiel 2.



Lösung: Es gilt $\alpha = l_ü \sqrt{\frac{2G_K}{E_B \cdot s \cdot h}}$ sowie $C_1 = C_2 = C$ und $D_1 = D_2 = 0$ wählbar

Randbed. für $x = l_ü/2$ ergibt (a) $N_2 = -F$ und (b) $N_1 = 0$

für $x = -l_ü/2$ (c) $N_2 = -F$ und (d) $N_1 = 0$

Was Symmetrie bezüglich $x=0$ für N_2 ergibt;

also $\boxed{A = 0}$

(b) $-\frac{b \cdot l_ü}{\alpha} B \cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right) + C_1 = 0$ oder $C_1 = \frac{b \cdot l_ü}{\alpha} B \cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

(a) $\frac{b \cdot l_ü}{\alpha} B \cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right) + C_1 = -F$ oder $-F = -\frac{2 \cdot b \cdot l_ü}{\alpha} B \cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

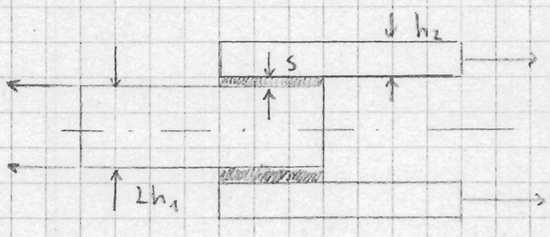
$$B = -\frac{\alpha}{2 \cdot b \cdot l_ü \cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \cdot F$$

$$\boxed{\tau = -\frac{F}{b \cdot l_ü} \cdot \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\sinh\left(\frac{\alpha x}{l_ü}\right)}{\cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}$$

$$\boxed{\tau_{max} = \pm \frac{F}{b \cdot l_ü} \cdot \frac{\alpha}{2} \cdot \tanh\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad \text{für } x = \mp l_ü/2$$

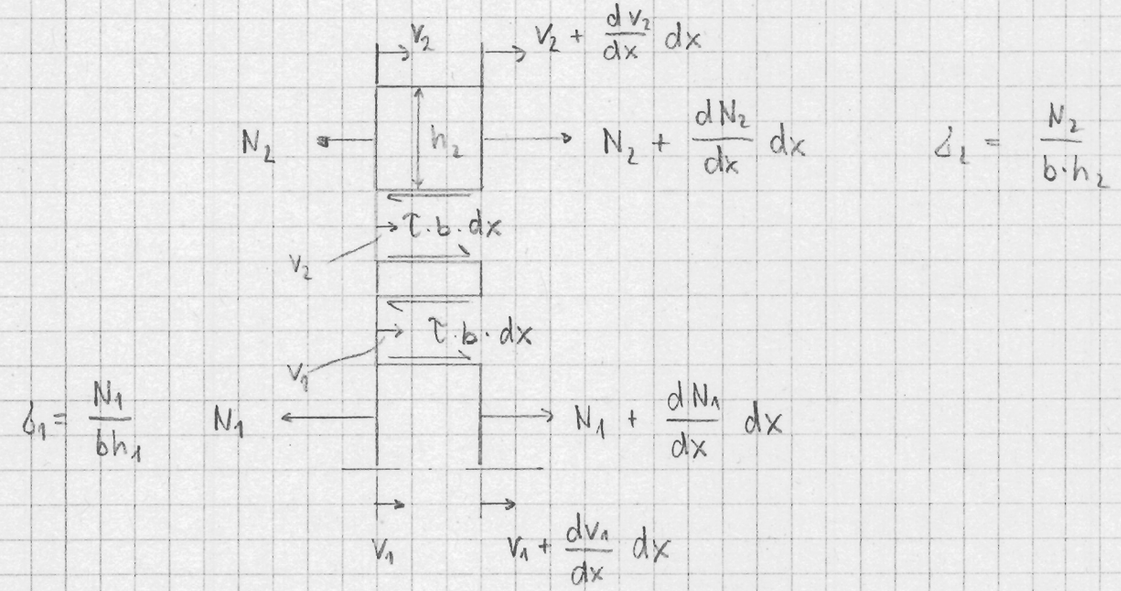
achsensymmetr.
Problem → achsensymm. Größe fällt heraus → cosh fällt raus

Kraftleitungsprobleme



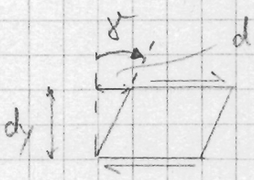
Modell: dünn Blech - vorwiegend Zugbelastung
+ schubweiche Verbindungsschicht Dicke s

- Übergang zum differentiellen Element dx, Breite/Tiefe b



b ... Breite
dx ... Länge
h ... Höhe
N ... Normalkraft
τ ... Schubspg
v ... Verschiebung
σ ... Normalspg.

E_B ... E-Modul Bauteil
γ ... Gleitung
G_k ... Schubmodul
$L_{ü}$ ... Überlappungslänge



$$\gamma = \frac{du}{dy} = \frac{v_2 - v_1}{s}$$

$$\gamma = \frac{\tau}{G_k}$$

BRUNNEN

$$- \; N_2 + \frac{dN_2}{dx} dx - N_2 - \tau \cdot b \cdot dx = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\frac{dN_2}{dx} = \tau \cdot b} \qquad (1)$$

$$- \; \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_{B2}} = \frac{N_2}{E_{B2} b h_2} = \frac{dv_2}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\frac{dv_2}{dx} = \frac{N_2}{E_{B2} b h}} \qquad (2)$$

$$- \; \gamma = \frac{\tau}{G_K} \left(= \frac{du}{dy} \right) = \frac{v_2 - v_1}{s}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\gamma = \frac{v_2 - v_1}{s}} \qquad (3)$$

$$- \; N_1 + \frac{dN_1}{dx} - N_1 + \tau \cdot b \cdot dx = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\frac{dN_1}{dx} = -\tau \cdot b} \qquad (4)$$

$$- \; \varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_{B1}} = \frac{N_1}{E_{B1} h_1 b} = \frac{dv_1}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\frac{dv_1}{dx} = \frac{N_1}{E_{B1} h_1 b}} \qquad (5)$$

Herleitung der DGL

- (1) in $\frac{d}{dx}$ (2): $\quad \frac{d}{dx}(2) \Rightarrow \frac{d^2 v_2}{dx^2} = \frac{dN_2}{dx} \cdot \frac{1}{E_{B2} b h_2}$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2 v_2}{dx^2} = \frac{\tau}{E_{B2} h_2}$$

- (4) in $\frac{d}{dx}$ (5): $\quad \frac{d}{dx}(5) \Rightarrow \frac{d^2 v_1}{dx^2} = \frac{dN_1}{dx} \cdot \frac{1}{E_{B1} b h_1}$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2 v_1}{dx^2} = -\frac{\tau}{E_{B1} h_1}$$

- $\frac{d^2}{dx^2}$ (3): $\quad \Rightarrow \frac{1}{s}\left(\frac{d^2 v_2}{dx^2} - \frac{d^2 v_1}{dx^2}\right) = \frac{d^2 \gamma}{dx^2} = \frac{1}{G_K} \frac{d^2 \tau}{dx^2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{G_K} \cdot \frac{d^2 \tau}{dx^2} - \frac{1}{s}\left(\frac{\tau}{E_{B2} h_2} + \frac{\tau}{E_{B1} h_1}\right) = 0$$

$$\frac{d^2 \tau}{dx^2} - \tau \frac{G_K}{s}\left(\frac{1}{E_{B2} h_2} + \frac{1}{E_{B1} h_1}\right) = 0$$

mit $E_{B1} = E_{B2} = E_B$ & $h_1 = h_2 = h$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2 \tau}{dx} - \tau \frac{2 G_K}{s}\left(\frac{1}{E_B h}\right) = 0$$

- Einbringen von $l_{ü}$

$$\alpha^2 = \frac{2 G_K}{s E_B h} \cdot l_{ü}^2 \qquad \left[\frac{\frac{N}{m^2}}{m \frac{N}{m^2} m} \cdot m^2 = \frac{1}{1}\right]$$

$$\Rightarrow \quad l_{ü} \frac{d^2 \tau}{dx^2} - \tau \frac{2 G_K l_{ü}^2}{s E_B h} = 0$$

BRUNNEN

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2\tau}{d\left(\frac{x}{l_{ü}}\right)^2} - \alpha^2 \tau = 0} \quad \text{bzw} \quad \boxed{\frac{d^2\tau}{d\eta^2} - \alpha^2 \tau = 0}$$

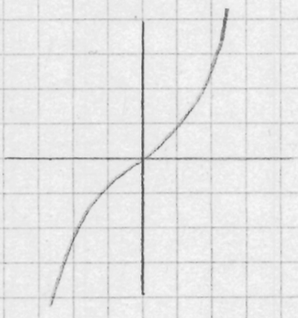
$$\eta = \frac{x}{l_{ü}}$$

Lösung für diese DGL 2. Ordnung

$$\boxed{\tau = A \cosh(\alpha \cdot \eta) + B \sinh(\alpha \cdot \eta)} \quad \text{bzw.}$$

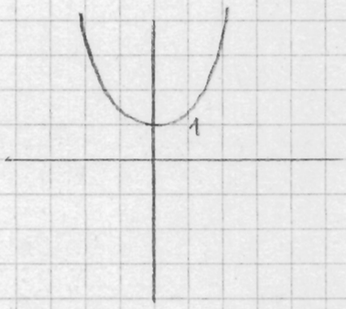
$$\boxed{\tau = A \cosh\left(\alpha \cdot \frac{x}{l_{ü}}\right) + B \sinh\left(\alpha \cdot \frac{x}{l_{ü}}\right)}$$

- Sinus hyperbolicus



$$y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

- Cosinus hyperbolicus



$$y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Lösungen für integrierte Größen

- $\frac{dN_1}{dx} = -\tau \cdot b$

$$\Rightarrow \int dN_1 = \int -\tau \cdot b \, dx$$

$$N_1 = -\frac{b \cdot l_{ü}}{\alpha}\left[A \sinh\left(\frac{\alpha x}{l_{ü}}\right) + B \cosh\left(\frac{\alpha x}{l_{ü}}\right)\right] + C_1$$

- $\frac{dN_2}{dx} = \tau \cdot b$

$$\Rightarrow \int dN = \int \tau \, b \, dx$$

$$\Rightarrow N_2 = \frac{b \, l_{ü}}{\alpha}\left[A \sinh\left(\frac{\alpha x}{l_{ü}}\right) + B \cosh\left(\frac{\alpha x}{l_{ü}}\right)\right] + C_2$$

- $\frac{dv_1}{dx} = \frac{N_1}{E_{B1} h_1 b}$

$$\Rightarrow \int dv_1 = \int \frac{N_1}{E_{B1} h_1 b} dx$$

$$v_1 = -\frac{1}{E_{B1} h_1 b} \cdot \frac{b \, l_{ü}^2}{\alpha^2} \cdot \left[A \cosh\left(\frac{\alpha x}{l_{ü}}\right) + B \sinh\left(\frac{\alpha x}{l_{ü}}\right)\right] + \frac{1}{E_{B1} h_1 b} C_1 x + D_1$$

- $\frac{dv_2}{dx} = \frac{N_2}{E_{B2} h_2 b}$

$$\Rightarrow \int dv_2 = \int \frac{N_2}{E_{B2} h_2 b} dx$$

$$v_2 = \frac{1}{E_{B2} h_2 b} \cdot \frac{b \, l_{ü}^2}{\alpha^2}\left[A \cosh\left(\frac{\alpha x}{l_{ü}}\right) + B \sinh\left(\frac{\alpha x}{l_{ü}}\right)\right] + \frac{1}{E_{B2} h_2 b} \cdot C_2 x + D_2$$

- außerdem muss gelten: $\frac{v_2 - v_1}{s} = \frac{\tau}{G_K}$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{E_{B2} h_2 b s} \cdot \frac{b \, l_{ü}^2}{\alpha^2} + \frac{1}{E_{B1} h_1 b s} \cdot \frac{b \, l_{ü}^2}{\alpha^2}\right)\left[A \cosh\left(\frac{\alpha x}{l_{ü}}\right) + B \sinh\left(\frac{\alpha x}{l_{ü}}\right)\right]$$

$$+ \frac{1}{s}\left(\frac{C_2}{E_{B2} h_2 b} - \frac{C_1}{E_{B1} h_1 b}\right) x + \frac{1}{s}\left(D_2 - D_1\right) = \frac{\tau}{G_K}$$

BRUNNEN

mit $E_{B1} = E_{B2} = E_B$ $h_1 = h_2 = h$ folgt

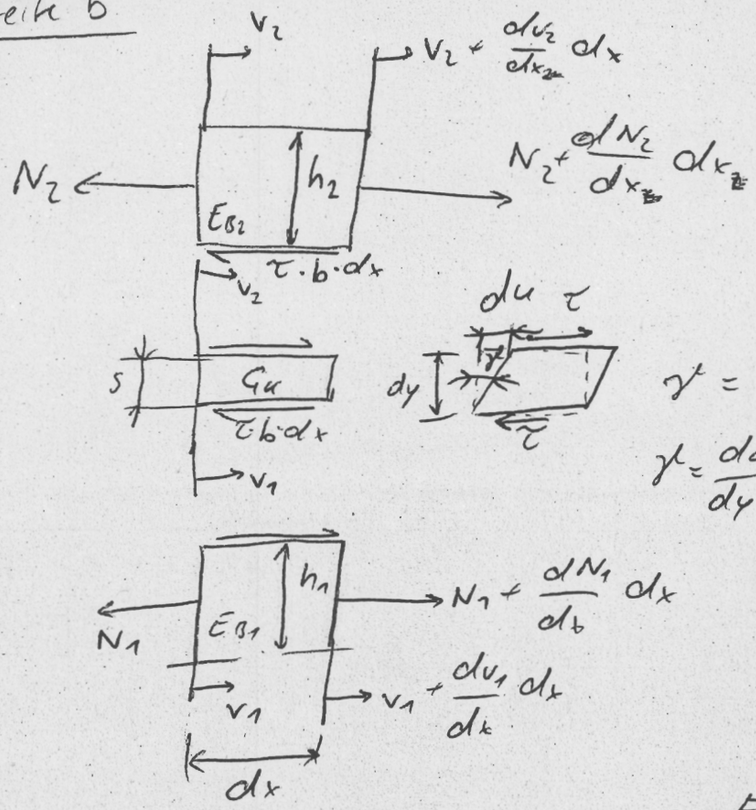
$$\frac{1}{s}\left(\frac{C_2 - C_1}{E_B h b}\right) x \stackrel{!}{=} 0 \quad \rightsquigarrow \quad C_2 = C_1 = C$$

$$\frac{1}{s}(D_2 - D_1) \stackrel{!}{=} 0 \quad \rightsquigarrow \quad D_2 = D_1 = D$$

Anpassung an das Problem über Randbedingungen

Breite b

Michas Herleitung



$$\sigma_2 = \frac{N_2}{b \cdot h_2}$$

$$\gamma = \frac{\tau}{G_u} \quad b_{zw}: \tau = G_u \gamma$$

$$\gamma = \frac{du}{dy} = \frac{v_2 - v_1}{s}$$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{b \cdot h_1}$$

b... Breite (Tiefe)

dx... Länge

h_n... Höhe

N... Normalkraft

τ... Schubspannung

v_n... Verschiebung

σ_n... Normalspannung

E_{Bn}... E-Modul d. Bauteils

γ... Gleitung

G... Gleitmodul/Schubmodul

$l_ü$... Überlappungslänge

(1) $$N_2 + \frac{dN_2}{dx} dx - N_2 - \tau \cdot b \, dx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dN_2}{dx} dx = \tau b \, dx \Rightarrow \underline{\frac{dN_2}{dx} = \tau \cdot b \quad (1)}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_{B2}} = \frac{N_2}{E_{B2} \cdot b \cdot h_2} = \frac{dv_2}{dx}$$

$$\Rightarrow \underline{\frac{dv_2}{dx} = \frac{N_2}{E_{B2} \cdot b \cdot h_2} \quad (2)}$$

$$\gamma = \frac{\tau}{G_k} = \frac{v_2 - v_1}{s} \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{v_2 - v_1}{s} \quad (3)$$

$$N_1 + \frac{dN_1}{dx} dx - N_1 + \tau \cdot b \cdot dx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dN_1}{dx} = -\tau \cdot b \cdot dx$$

$$\Rightarrow \frac{dN_1}{dx} = -\tau \cdot b \quad (4)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_{B1}} = \frac{N_1}{E_{B1} \cdot b \cdot h_1} = \frac{dv_1}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dv_1}{dx} = \frac{N_1}{E_{B1} \cdot b \cdot h_1} \quad (5)$$

(1) in $\frac{d}{dx}$ (2): $\frac{d^2 v_2}{dx^2} = \frac{\tau \cdot b}{E_{B2} \cdot b \cdot h_2}$

$$\Rightarrow \frac{d^2 v_2}{dx^2} = \frac{\tau}{E_{B2} \cdot h_2}$$

(4) in $\frac{d}{dx}$ (5): $\frac{d^2 v_1}{dx^2} = -\frac{\tau \cdot b}{E_{B1} \cdot b \cdot h_1}$

$$\Rightarrow \frac{d^2 v_1}{dx^2} = -\frac{\tau}{E_{B1} \cdot h_1}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(3) \Rightarrow \frac{1}{s}\left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}\right) = \frac{1}{G_k} \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{s}\left(\frac{\tau}{E_{B2} h_2} + \frac{\tau}{E_{B1} h_1}\right) = \frac{1}{G_k} \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} - \tau \cdot \frac{G_u}{s}\left(\frac{1}{E_{B2} \cdot h_2} + \frac{1}{E_{B1} \cdot h_1}\right) = 0$$

mit $\frac{1}{E_{B2} \cdot h_2} + \frac{1}{E_{B1} \cdot h_1} = \frac{2}{E_B \cdot h}$

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} - \tau \frac{2 \cdot G_u}{s \cdot E_B \cdot h} = 0$$

$$\frac{\frac{N}{m^2}}{m \cdot \frac{N}{m^2} \cdot m} = \frac{1}{m^2}$$

$$\hookrightarrow \frac{2 \cdot G_u}{s \cdot E_B \cdot h} = \frac{\alpha^2}{l_{ü}^2}$$

$$\Rightarrow \alpha^2 = \frac{2 \cdot l_{ü}^2 \cdot G_u}{s \cdot E_B \cdot h} \Rightarrow \alpha = l_{ü} \sqrt{\frac{2 \cdot G_u}{s \cdot E_B \cdot h}}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \tau}{\partial (x/l_{ü})^2} - \tau \cdot \alpha^2 = 0}$$ $\Rightarrow$ DGL 2. Ordnung für Schubspannung in Klebefuge

~~Lösung:~~

$\tau = A \cosh$ mit $\eta = \frac{x}{l_{ü}}$:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \tau}{\partial \eta^2} - \tau \cdot \alpha^2 = 0}$$

Lösung:

$\tau = A \cosh(\alpha \cdot \eta) + B \sinh(\alpha \cdot \eta)$

oder:

$\tau = A \cosh\left(\alpha \cdot \frac{x}{l_{ü}}\right) + B \sinh\left(\alpha \cdot \frac{x}{l_{ü}}\right)$

$$\frac{dN_2}{dx} = \tau \cdot b \qquad \frac{dN_1}{dx} = -\tau \cdot b$$

$$\frac{dv_2}{dx} = \frac{N_2}{E_{B_2} \cdot b \cdot h_2} \qquad \frac{dv_1}{dx} = \frac{N_1}{E_{B_1} \cdot b \cdot h_1}$$

$$dN_2 = b\left[A\cosh\left(\alpha\frac{x}{l_i}\right) + B\sinh\left(\frac{\alpha}{l_i}x\right)\right]dx$$

$$\boxed{N_2 = \frac{b \cdot l_i}{\alpha}\left[A\sinh\left(\frac{\alpha}{l_i}x\right) + B\cosh\left(\frac{\alpha}{l_i}x\right)\right] + C_2}$$

$$dN_1 = -b\left[A\cosh\left(\frac{\alpha}{l_i}x\right) + B\sinh\left(\frac{\alpha}{l_i}x\right)\right]dx$$

$$\boxed{N_1 = -\frac{b \cdot l_i}{\alpha}\left[A\sinh\left(\frac{\alpha}{l_i}x\right) + B\cosh\left(\frac{\alpha}{l_i}x\right)\right] + C_1}$$

$$dv_2 = \left(\frac{b \cdot l_i}{\alpha}\left[A\sinh\left(\frac{\alpha}{l_i}x\right) + B\cosh\left(\frac{\alpha}{l_i}x\right)\right] + C_2\right) \cdot \frac{1}{E_{B_2} \cdot b \cdot h_2}\,dx$$

$$\boxed{v_2 = \frac{b \cdot l_i^2}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{E_{B_2} \cdot b \cdot h_2}\left[A\cosh\left(\frac{\alpha}{l_i}x\right) + B\sinh\left(\frac{\alpha}{l_i}x\right)\right] + C_2\frac{x}{E_{B_2} \cdot h_2 \cdot b} + D_2}$$

$$dv_1 = \left\{-\frac{b \cdot l_i}{\alpha} \cdot \frac{1}{E_{B_1} \cdot h_1 \cdot b}\left[A\sinh\left(\frac{\alpha}{l_i}x\right) + B\cosh\left(\frac{\alpha}{l_i}x\right)\right] + C_1\frac{1}{E_{B_1} \cdot h_1 \cdot b}\right\}dx$$

$$v_1 = -\frac{b \cdot l_i^2}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{E_{B_1} \cdot h_1 \cdot b}\left[A\cosh\left(\frac{\alpha}{l_i}x\right) + B\sinh\left(\frac{\alpha}{l_i}x\right)\right] + C_1\frac{x}{E_{B_1} \cdot h_1 \cdot b} + D_1$$

in (3):

$$\frac{\tau}{G_u} = \frac{\dfrac{b \cdot l_i^2}{\alpha^2} \cdot \dfrac{1}{E_{B_2} \cdot b \cdot h_2} \cdot \left[A\cosh\left(\frac{\alpha}{l_i}x\right) + B\sinh\left(\frac{\alpha}{l_i}x\right)\right] + C_1\dfrac{x}{E_{B_2} \cdot h_2 \cdot b} + D_2}{s}$$

$$- \frac{\dfrac{b \cdot l_i^2}{\alpha^2} \cdot \dfrac{1}{E_{B_1} \cdot h_1}\left[A\cosh\left(\frac{\alpha}{l_i}x\right) + B\sinh\left(\frac{\alpha}{l_i}x\right)\right] + C_1\dfrac{x}{E_{B_1} \cdot h_1 \cdot b} + D_1}{s}$$

$$\frac{\tau}{u} = \frac{2 \cdot \dfrac{b \cdot l_i^2}{\alpha^2} \cdot \left[A\cosh\left(\frac{\alpha}{l_i}x\right) + B\sinh\left(\frac{\alpha}{l_i}x\right)\right]\dfrac{1}{E_B \cdot h \cdot b}}{s} + \left(\frac{\dfrac{C_2}{E_B \cdot h \cdot b} - \dfrac{C_1}{E_b \cdot h \cdot b}}{s}\right)x + \left(\frac{D_2 - D_1}{s}\right)$$

~~$\tau = A\cosh\left(\frac{\alpha}{l_i}\cdot x\right) + B\sinh\left(\frac{\alpha}{2}\cdot x\right)$~~

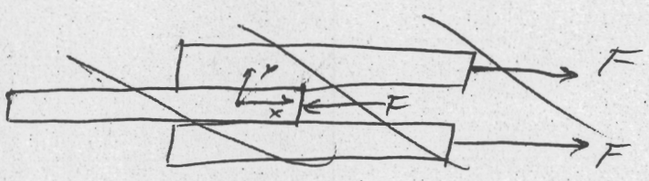
$\tau = A\cosh\left(\frac{\alpha}{l_i}\cdot x\right) + B\sinh\left(\frac{\alpha}{l_i}\cdot x\right)$

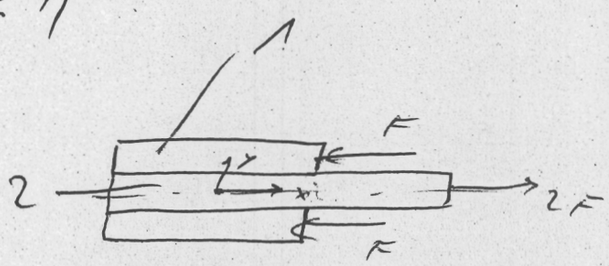
$$\frac{dN}{dx} = \tau \cdot b$$

$$dN = \tau \cdot b\, dx$$

$$N_1 = -\frac{b\cdot l_i}{\alpha}\left(A\sinh\left(\frac{\alpha}{l_i}x\right) + B\cosh\left(\frac{\alpha}{l_i}x\right)\right) + C$$

$$N_2 = \frac{b\cdot l_i}{\alpha}\left(A\sinh\left(\frac{\alpha}{l_i}x\right) + B\cosh\left(\frac{\alpha}{l_i}x\right)\right) + C$$





$N_1\left(x = \frac{l_i}{2}\right) = -F \qquad N_1\left(x = -\frac{l_i}{2}\right) = 0$

$N_2\left(x = \frac{l_i}{2}\right) = F \qquad N_2\left(x = -\frac{l_i}{2}\right) = 0$

$$-F = \frac{b\cdot l_i}{\alpha}\left(A\sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right) + B\cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) + C \quad (1)$$

$$0 = \frac{b\cdot l_i}{\alpha}\left(A\sinh\left(-\frac{\alpha}{2}\right) + B\cosh\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\right) + C$$

$$0 = \frac{b\cdot l_i}{\alpha}\left(-A\sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right) + B\cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) + C \quad (2)$$

(1)−(2): $F = \frac{2\cdot b\cdot l_i}{\alpha} A\sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 2C \Rightarrow \boxed{A = \frac{F\cdot\alpha}{2\cdot b\cdot l_i\cdot\sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}$

(1)+(2): $F = \frac{2b\cdot l_i}{\alpha} B\cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow \boxed{B = \frac{F\cdot\alpha}{2\cdot b\cdot l_i\cdot\cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}$

$= \frac{b\cdot l_i}{\alpha}\left(A\sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right) + B\cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right) + C\right)$ (3) (1)−(3): $0 = -2C$

$\boxed{C = 0}$

$$\tau = \frac{F \cdot \alpha}{2 \cdot b \cdot l_i} \cdot \frac{\cosh\left(\frac{\alpha}{l_i} \cdot x\right)}{\sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right)} + \frac{F \cdot \alpha}{2 \cdot b \cdot l_i} \cdot \frac{\sinh\left(\frac{\alpha}{l_i} \cdot x\right)}{\cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$\tau_{max}\left(\frac{l_i}{2}\right) = \frac{F \cdot \alpha}{2 \cdot b \cdot l_i} \left[\frac{\cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right)} + \frac{\sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \right]$$

$$\tau\left(\frac{l_i}{2}\right) = \frac{F \cdot \alpha}{2 \cdot b \cdot l_i} \cdot \left[\coth\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \tanh\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right] \rightarrow 2$$

$$\tau\left(-\frac{l_i}{2}\right) = \frac{F \cdot \alpha}{2 \cdot b \cdot l_i} \left[\frac{\cosh\left(-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right)} + \frac{\sinh\left(-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \right]$$

$$\tau\left(-\frac{l_i}{2}\right) = \frac{F \cdot \alpha}{2 \cdot b \cdot l_i} \left[\frac{\cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right)} - \frac{\sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \right]$$

$$\tau\left(\frac{l_i}{2}\right) = \frac{F \cdot \alpha}{2 \cdot b \cdot l_i} \left[\coth\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \tanh\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right]$$