Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik

PD Dr. Robert Beinert

# Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen
## (Klausur – Zweitermin)

8. April 2026 Wintersemester 2025/26

**Name:** _____

**Vorname:** _____

**Matrikelnummer:** _____

**Studiengang:** _____

**Erklärung des Studierenden / der Studierenden:**

Hiermit erkläre ich, dass

- mir die für diese Prüfung relevanten Zulassungsvoraussetzungen aus der StuPO bekannt sind. Mir ist außerdem bewusst, dass ihre Nichterfüllung zur Ungültigkeit der Prüfung führen kann (§ 63 Abs. 2 AllgStuPO).
- mir bekannt ist, dass die Teilnahme an der Prüfung eine ordnungsgemäße Anmeldung voraussetzt, andernfalls die Prüfung nicht gültig ist (§ 63 Abs. 1 AllgStuPO).
- mir bekannt ist, dass eine Prüfung, die unter bekannten und bewusst in Kauf genommenen gesundheitlichen Beeinträchtigungen abgelegt wird, grundsätzlich Gültigkeit hat (§ 64 Abs. 1 Satz AllgStuPO).

Ich fühle mich prüfungsfähig.

**Datum, Unterschrift**

# Musterlösung

### Hilfsmittel

- Zugelassen ist ein **doppelseitig handbeschriebenes DIN A4-Blatt** mit Notizen.
- Taschenrechner und Formelsammlungen sind **nicht zugelassen**.

---

### Klausur

- Die Klausur besteht aus **5 Aufgaben**.
- Zum Bestehen sind **40/80 Punkte** hinreichend.
- Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.
- Die **Lösungen inklusive Rechenweg/Begründung** sind mit einem **dokumentenechten** Stift auf dem **bereitgestellten Papier** abzugeben.
- Die Aufgaben sind ausschließlich mit den **Methoden der Vorlesung** zu lösen.

---

**Klausureinsicht:** Dienstag, den 14. April 2026, 10:00–11:00 Uhr, H 2038.

**Laplacetransformation**

| $f(t)$ | $\mathcal{L}[f](s)$ | |
|---|---|---|
| $1$ | $1/s$ | |
| $t^n$ | $n!/s^{n+1}$ | $n \in \mathbb{N}$ |
| $\mathrm{e}^{at}$ | $1/(s-a)$ | $a \in \mathbb{C}$ |
| $t^{n-1}\mathrm{e}^{at}/(n-1)!$ | $1/(s-a)^n$ | $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{C}$ |
| $1/\sqrt{\pi t}$ | $1/\sqrt{s}$ | |
| $\sin(at)$ | $a/(s^2+a^2)$ | $a \in \mathbb{R}$ |
| $\cos(at)$ | $s/(s^2+a^2)$ | $a \in \mathbb{R}$ |
| $\sinh(at)$ | $a/(s^2-a^2)$ | $a \in \mathbb{R}$ |
| $\cosh(at)$ | $s/(s^2-a^2)$ | $a \in \mathbb{R}$ |

**Fouriertransformation**

| $f(t)$ | $\mathcal{F}[f](\omega)$ | |
|---|---|---|
| $\mathbf{1}_{[-T,T]}(t)$ | $2T\,\mathrm{sinc}(\omega T)$ | $T > 0$ |
| $\mathrm{e}^{-t^2/2}$ | $\sqrt{2\pi}\,\mathrm{e}^{-\omega^2/2}$ | |
| $\mathrm{e}^{-a\lvert t\rvert}$ | $2a/(\omega^2+a^2)$ | $a > 0$ |

**Stammfunktionen**

| $f(t)$ | $F(t)$ | |
|---|---|---|
| $t^\alpha$ | $t^{\alpha+1}/(\alpha+1)$ | $\alpha \neq -1$ |
| $1/t$ | $\ln\lvert t\rvert$ | |
| $1/(1-t)$ | $\ln(1/(1-t))$ | $t < 1$ |
| $\mathrm{e}^t$ | $\mathrm{e}^t$ | |
| $\sin(t)$ | $-\cos(t)$ | |
| $\cos(t)$ | $\sin(t)$ | |
| $\sinh(t)$ | $\cosh(t)$ | |
| $\cosh(t)$ | $\sinh(t)$ | |
| $1/\sqrt{1-t^2}$ | $\arcsin(t)$ | $\lvert t\rvert \leq 1$ |
| $1/(t^2+1)$ | $\arctan(t)$ | |
| $1/(t\ln(t))$ | $\ln(\lvert\ln(t)\rvert)$ | $t > 0$, $t \neq 1$ |

## **Aufgabe 1** (*Separable Differentialgleichungen*) [15 Punkte]

Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$x'(t) = 3t^2\sqrt{1 - x^2(t)}, \tag{1a}$$

$$x\big((\tfrac{\pi}{3})^{1/3}\big) = \tfrac{\sqrt{3}}{2}. \tag{1b}$$

(a) Begründe, warum die Lösung des Anfangswertproblems (1a–1b) eindeutig ist. [4P]

(b) Begründe, warum die Differentialgleichung (1a) *separabel* ist. [2P]

(c) Bestimme alle konstanten Lösungen der Differentialgleichung (1a). [2P]

(d) Löse das Anfangswertproblem (1a–1b) durch Trennung der Veränderlichen. [6P]
*Hinweis:* $\arcsin\colon [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$, $\arcsin(\sqrt{3}/2) = \pi/3$.

(e) Bestimme den maximalen Definitionsbereich der in (d) berechneten Lösung. [1P]

## **Aufgabe 2** (*Lineare Differentialgleichungssysteme*) [18 Punkte]

Gegeben ist das Differentialgleichungssystem

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

*Hinweis:* $\vec{v} \coloneqq (0, 1, 1)^\top$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert 1.

(a) Bestimme die Dimension des Lösungsraums von (2). Begründe deine Antwort. [2P]

(b) Bestimme die allgemeine, reellwertige Lösung des Systems (2). [12P]

(c) Bestimme mithilfe von (b) eine Lösung mit Anfangswert $\vec{x}(0) = (0, 1, 2)^\top$. [2P]

(d) Begründe, warum die Lösung in (c) eindeutig ist. [2P]

**Aufgabe 3** (*Differentialgleichungen höherer Ordnung*) [17 Punkte]

Gegeben ist die inhomogene Differentialgleichung

$$x''(t) - 2t^{-2}\,x(t) = 4t, \qquad t > 0. \tag{3}$$

(a) Schreibe (3) in das zugehörige lineare Differentialgleichungssystem um. [3P]

(b) Zeige, dass $x_1(t) \coloneqq t^2$ und $x_2(t) \coloneqq t^{-1}$ die zugehörige homogene Differentialgleichung von (3) lösen und ein Fundamentalsystem bilden. [6P]

(c) Bestimme eine partikuläre Lösung von (3) durch Variation der Konstanten. [7P]

(d) Bestimme die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (3). [1P]

**Aufgabe 4** (*Laplace-Ansatz für gewöhnliche Differentialgleichungen*) [15 Punkte]

Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$x''(t) + 4\,x(t) = \begin{cases} 0, & t < 3, \\ \cos(2(t-3)), & t \geq 3, \end{cases} \tag{4a}$$

$$x'(0) = -1,\ x(0) = 0. \tag{4b}$$

(a) Begründe, warum die rechte Seite von (4a) stückweise stetig und von exponentieller Ordnung ist. [4P]

(b) Wie und unter welchen Voraussetzungen kann die Laplace-Transformation mithilfe der Fourier-Transformation berechnet werden? [3P]

(c) Die Funktion $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ sei stetig und von exponentieller Ordnung. Für $t_0 \geq 0$, beweise den Verschiebungssatz

$$\mathcal{L}[f(t-t_0)](s) = \mathrm{e}^{-st_0}\mathcal{L}[f(t)](s). \tag{3P}$$

*Hinweis:* Setze $f(t) \coloneqq 0$ für $t < 0$.

(d) Nutze (c), um die Laplace-Transformierte der rechten Seite von (4a) zu berechnen. [2P]

(e) Nutze (d), um die Laplace-transformierte Lösung $X(s)$ von (4a–4b) zu berechnen. [3P]
*Hinweis:* Die Rücktransformation ist nicht erforderlich.

## **Aufgabe 5** (*Partielle Differentialgleichungen*) [15 Punkte]

Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - x\ln(x)\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0, \tag{5a}$$

$$u(x,0) = \ln(x) - \frac{5}{\ln(x)}, \tag{5b}$$

$$x > 1,\ t \geq 0. \tag{5c}$$

(a) Bestimme die Ordnung der Differentialgleichung (5a). Begründe deine Antwort. [2P]

(b) Verwende den Separationsansatz

$$u(x,t) \coloneqq X(x)\,T(t)$$

und stelle Differentialgleichungen für $X(x)$ und $T(t)$ auf. [4P]

(c) Löse die beiden in Teil (b) aufgestellten Differentialgleichungen. [6P]

(d) Verwende das Superpositionsprinzip für die Lösungen aus (c), um eine Lösung des Anfangswertproblems (5a–5c) zu finden. [3P]