Technische Universität Berlin **Sommersemester 2026**
Fakultät II – Institut für Mathematik
Doz.: S. Keiper, C. Mehl, P. Winkert
Ass.: J. Dubois, J. Halbey, R. Hosfeld

2. Probeklausur
„Analysis II für Ingenieurwissenschaften“

Name: ..... Vorname: .....

Matr.–Nr.: ..... Studiengang: .....

Erklärung:

Füllen Sie bitte zuerst das Deckblatt vollständig und leserlich aus. Damit erklären Sie, dass

- Ihnen die für diese Prüfung relevanten Zulassungsvoraussetzungen aus der StuPO bekannt sind. Ihnen ist außerdem bewusst, dass ihre Nichterfüllung zur Ungültigkeit der Prüfung führen kann (§63 Abs. 2 Satz 3 AllgStuPO);
- Ihnen bekannt ist, dass die Teilnahme an der Prüfung eine ordnungsgemäße Anmeldung voraussetzt, andernfalls die Prüfung nicht gültig ist (§61 Abs. 1 AllgStuPO);
- Ihnen bekannt ist, dass eine Prüfung, die unter bekannten und bewusst in Kauf genommenen gesundheitlichen Beeinträchtigungen abgelegt wird, grundsätzlich Gültigkeit hat.

Hinweise:

- Neben einem beidseitig handbeschriebenen DIN A4-Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen.
- Mit Bleistift oder Rotstift geschriebene Klausuren werden nicht gewertet.
- In Aufgabe 1 ist jeweils die richtige Aussage anzukreuzen. Es ist immer genau eine Aussage richtig. Bei Ankreuzen mehrerer Aussagen in einer Teilaufgabe gibt es keinen Punkt.
- In den Aufgaben 2 bis 10 ist nur das Ergebnis gefragt. Geben Sie keine Rechenwege an.

Die Bearbeitungszeit der Klausur beträgt 90 Minuten.

In der Klausur sind maximal 60 Punkte erreichbar. Die Klausur ist mit 30 Punkten bestanden.

Punkte

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ

1. **Aufgabe (Single Choice)** **(10 Punkte)**

Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt. In jeder Teilaufgabe ist genau eine Antwortmöglichkeit korrekt. Markieren Sie richtige Antworten so: (☒ oder ☑). Bei Ankreuzen mehrerer Antworten zu einer Teilaufgabe gibt es keinen Punkt. Im Falle einer Korrektur füllen Sie bitte Kästchen, die nicht berücksichtigt werden sollen, vollständig aus (■).

(a) Wir betrachten drei Folgen

$$(a_n)_{n\geq 1} = \left((1+\cos(\pi n))\, e^n\right)_{n\geq 1}, \qquad (b_n)_{n\geq 1} = \left(\frac{1}{n}\sin(\pi n)\right)_{n\geq 1},$$
$$(c_n)_{n\geq 1} = \left((-1)^n 2n^3\right)_{n\geq 1}.$$

Welche der folgenden Vektorfolgen konvergiert?

☐ $(a_n, b_n)_{n\geq 1}$
☐ $(b_n, b_{n+1})_{n\geq 1}$
☐ $(b_n, c_n)_{n\geq 1}$
☐ $(c_{2n}, c_{2n})_{n\geq 1}$

(b) Gegeben sei die Menge $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y < |\sin(x)|\}$. Welche Aussage ist wahr?

☐ Die Menge M ist offen.
☐ Die Menge M ist weder offen noch abgeschlossen.
☐ Die Menge M ist offen und abgeschlossen.
☐ Die Menge M ist abgeschlossen.

(c) Seien $\vec{v}, \vec{w}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zweimal stetig differenzierbare Vektorfelder und $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ein zweimal stetig differenzierbares Skalarfeld. Ferner sei $\vec{v}$ quellfrei.

Welches der folgenden Vektorfelder hat immer ein Vektorpotential?

☐ $\vec{v} + \vec{w}$
☐ $\vec{v} + \operatorname{rot} \vec{w}$
☐ $\vec{v} + \operatorname{grad} f$
☐ $f\vec{v}$

(d) Die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

ist

☐ positiv definit.
☐ negativ definit.
☐ indefinit.
☐ Keine der vorangegangenen Möglichkeiten

(e) Sei $\vec{f}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine total differenzierbare Abbildung. Welche Aussage gilt dann **nicht** in jedem Fall?

☐ Die Abbildung $\vec{f}$ ist stetig.
☐ Alle Richtungsableitungen von $\vec{f}$ existieren.
☐ Alle partiellen Ableitungen von $\vec{f}$ sind stetig.
☐ Alle partiellen Ableitungen von $\vec{f}$ existieren.

(f) Sei $\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld. Welcher der folgenden Ausdrücke ist erklärt?

- ☐ $\operatorname{rot}(\operatorname{div}\vec{v})$
- ☐ $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{v})$
- ☐ $\operatorname{grad}(\operatorname{rot}\vec{v})$
- ☐ $\operatorname{div}(\operatorname{grad}\vec{v})$

(g) Wir betrachten das Vektorfeld

$$\vec{F}\colon D \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{F}(x,y,z) = \begin{bmatrix} 6x^2z + \sin(x^2) \\ \mathrm{e}^{3y} + \ln(y) \\ 2x^3 + \frac{1}{z^8+4} \end{bmatrix},$$

wobei $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y > 0\}$ sei. Besitzt das Vektorfeld $\vec{F}$ ein Potential?

- ☐ Das Vektorfeld $\vec{F}$ hat ein globales Potential auf D.
- ☐ Das Vektorfeld $\vec{F}$ hat kein globales Potential auf D, da $\operatorname{rot}_{(x,y,z)}\vec{F} \neq \vec{0}$ für mindestens ein $(x,y,z) \in D$.
- ☐ Das Vektorfeld $\vec{F}$ hat nicht unbedingt ein globales Potential auf D, da D nicht konvex ist.
- ☐ Das Vektorfeld $\vec{F}$ hat kein globales Potential auf D, da $\operatorname{div}_{(x,y,z)}\vec{F} \neq 0$ für mindestens ein $(x,y,z) \in D$.

(h) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ und $f(0,0) = a$ für ein festes $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

- ☐ f ist stetig genau dann, wenn $a = 0$.
- ☐ Für jedes $a \in \mathbb{R}$ ist f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ stetig, und unstetig in $(0,0)$.
- ☐ f ist stetig genau dann, wenn $a = 2$.
- ☐ f ist stetig differenzierbar genau dann, wenn $a = 1$, und in diesem Fall gilt $\operatorname{grad}_{(0,0)} f = [0\ \ 0]^\top$.

(i) Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto \sin(x^2+7)y - (5-\pi z)^2$. Dann gilt:

- ☐ $\operatorname{grad} f = \vec{0}$.
- ☐ $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \begin{bmatrix} 2x\cos(x^2+7) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.
- ☐ $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(0,h,0) - f(0,0,0)}{h} = \pi$.
- ☐ Es gibt ein Vektorfeld $\vec{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, sodass $\vec{F} = \operatorname{grad} f$.

(j) Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine symmetrische Matrix mit den Eigenwerten $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$. Betrachte die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(\vec{p}) = \vec{p}^{\,\top} \cdot A \cdot \vec{p}$, wobei $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$ als Spaltenvektor aufgefasst wird. Dann gilt:

- ☐ Es gibt $\vec{p}_1, \vec{p}_2 \in \mathbb{R}^3$ mit $f(\vec{p}_1) < 0 < f(\vec{p}_2)$.
- ☐ Es gibt kein $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$ mit $f(\vec{p}) = 1$.
- ☐ Für alle $\vec{p} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ gilt $f(\vec{p}) > 0$.
- ☐ f ist bijektiv.

2. Aufgabe (Topologie und Folgen) (1 Punkt)

Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \begin{bmatrix} 4 \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) - \frac{1}{\ln(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ b \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie $b \in \mathbb{R}$.

$$b = \boxed{}$$

3. **Aufgabe (Stetigkeit)** **(2 Punkte)**

Wir betrachten die Abbildung

$$\vec{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \vec{f}(x,y) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 4x^2y^2 \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \\ 5\sin\left(y^3\right) + 3e^{5x} \end{bmatrix}, & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ so, dass $\vec{f}$ auf $\mathbb{R}^2$ stetig ist.

Dann ist

$$a = \boxed{}, \quad b = \boxed{}.$$

4. **Aufgabe (Differenzierbarkeit)** **(5 Punkte)**

(a) Wir betrachten eine differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = 6x + 3\sin(x-1) - 4xy + y^2.$$

Berechnen Sie die den Gradienten $\operatorname{grad}_{(1,-1)} f = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ für $a, b \in \mathbb{R}$.

$$a = \boxed{}, \quad b = \boxed{}.$$

Sei $\vec{v} = \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix}$ mit $\|\vec{v}\| = 1$ die Richtung des stärksten Anstiegs von f im Punkt $(1,2)$. Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}$.

$$c = \boxed{}.$$

(b) Wir betrachten eine differenzierbare Abbildung $\vec{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\vec{f}'(x,y) = \begin{bmatrix} 9x^2 & 0 \\ 0 & 2e^{y-2} \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie die Richtungsableitung $\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{v}}(1,2) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ in Richtung des Vektors $\vec{v} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

$$a = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \boxed{}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \boxed{}.$$

5. **Aufgabe (Taylor, Fehlerschranken, Koordinatensysteme)** **(7 Punkte)**

(a) Wir betrachten eine stetig differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(2,-1) = -5, \quad \operatorname{grad}_{(2,-1)} f = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Das Taylorpolynom 1. Ordnung $T_1(f)$ von f im Entwicklungspunkt $(2,-1)$ kann in der Form

$$T_1(f)(x,y) = ax + by + c$$

dargestellt werden. Bestimmen Sie $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$a = \boxed{}, \quad b = \boxed{}, \quad c = \boxed{}.$$

(b) Gegeben seien die Menge $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -4 \le x \le 3,\ 2 \le y \le 5\}$ und eine differenzierbare Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$ mit Gradienten

$$\operatorname{grad}_{\vec{x}} f = \begin{bmatrix} 2x^2 \\ 3y \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie die kleinsten oberen Schranken $a, b \in \mathbb{R}$, sodass $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(\vec{p})\right| \le a$ und $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(\vec{p})\right| \le b$ für alle $\vec{p} \in M$ gilt.

$$a = \boxed{}, \quad b = \boxed{}.$$

(c) Die Menge

$$K = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 \le 1,\ x \le 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0\right\}$$

lässt sich in Kugelkoordinaten durch

$$K = \left\{(r\cos(\varphi)\sin(\theta), r\sin(\varphi)\sin(\theta), r\cos(\theta)) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; r \in [0,1],\ \theta \in [a,b],\ \varphi \in \left[\frac{\pi}{2}, c\right]\right\}$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ schreiben. Bestimmen Sie b und c.

$$b = \boxed{}, \quad c = \boxed{}.$$

6. **Aufgabe (Extrema)** **(8 Punkte)**

(a) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 + x - y - 2$. f hat genau einen kritischen Punkt (x_0, y_0), und die Hesse-Matrix von f in diesem Punkt hat die Form

$$\mathrm{H}_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}.$$

Es gilt:

$$x_0 = \boxed{}, \quad y_0 = \boxed{},$$

$$h_{11} = \boxed{}, \quad h_{12} = h_{21} = \boxed{}, \quad h_{22} = \boxed{}.$$

(b) Maximieren Sie $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x - y$ unter der Nebenbedingung

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 2 = 0\,,$$

d.h. bestimmen Sie

$$M = \max\{h(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\colon\ g(x, y) = 0\}$$

sowie das in diesem Fall eindeutige $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ mit $g(x_1, y_1) = 0$, sodass

$$M = h(x_1, y_1)$$

gilt.

$$M = \boxed{}, \quad x_1 = \boxed{}, \quad y_1 = \boxed{}.$$

7. **Aufgabe (Potentiale)** **(3 Punkte)**

Für welche Werte von $a, b, c \in \mathbb{R}$ hat das Vektorfeld

$$\vec{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto \begin{bmatrix} (a^2 + b)x^2 + (c + 2)y \\ (a + 1)y^3 + (2a + b)z \\ (c^2 + b)x - (a - 2)bz \end{bmatrix}$$

ein Potential?

$$a = \boxed{}, \quad b = \boxed{}, \quad c = \boxed{}.$$

8. **Aufgabe (Kurven- und Oberflächenintegrale)** **(7 Punkte)**

(a) Gegeben seien das Vektorfeld

$$\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{v}(x,y,z) = \begin{bmatrix} y \\ 4 \\ -x \end{bmatrix}$$

und die Kurve $\vec{\gamma}\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$ mit Parametrisierung $\vec{\gamma}(t) = \begin{bmatrix} 4 \\ 2t-1 \\ -3t \end{bmatrix}$.

Berechnen Sie $\displaystyle\int_{\vec{\gamma}} \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s} =$ $\boxed{}$.

(b) Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \sqrt[3]{x} - y$$

und die Kurve $\vec{\gamma}\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ mit Parametrisierung $\vec{\gamma}(t) = \begin{bmatrix} t^3 \\ -2t \end{bmatrix}$.

Der Ansatz zur Berechnung des skalaren Kurvenintegrals führt auf das Integral

$$\int_{\vec{\gamma}} f \,\mathrm{d}s = \int_0^1 At\sqrt{Bt^C + 4}\,\mathrm{d}t$$

für Konstanten $A, B, C \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie A, B und C.

$$A = \boxed{}, \quad B = \boxed{}, \quad C = \boxed{}.$$

(c) Eine Parametrisierung der glatten Fläche F sowie die Richtung des zugehörigen vektoriellen Oberflächenelementes sind gegeben durch

$$\vec{x}\colon [1,2] \times [1,3] \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{x}(u,v) = \begin{bmatrix} u \\ v \\ \ln(uv) \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{x}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}(u,v) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{u} \\ -\frac{1}{v} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Weiterhin sei das Vektorfeld

$$\vec{w}\colon]0,\infty[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{w}(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2x^2 \\ 5\mathrm{e}^z \\ \frac{4e^z}{x} \end{bmatrix}$$

gegeben. Der Ansatz zur Berechnung des Flussintegrals führt auf das Integral

$$\iint_F \vec{w} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}O} = \int_1^s \int_1^2 (au + bv)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

mit Konstanten $a, b, s \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie a, b, s.

$$a = \boxed{}, \quad b = \boxed{}, \quad s = \boxed{}.$$

9. **Aufgabe (Mehrdimensionale Integration)** **(11 Punkte)**

(a) Seien

$$\vec{f}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (u,v,w) \mapsto \begin{bmatrix} u+w \\ 2w \\ v^2 \end{bmatrix}$$

und $Q = [0,a] \times [0,b] \times [0,c]$ ein Quader mit Seitenlängen $a, b, c > 0$. Wir fassen $\vec{f}$ als Koordinatentransformation auf. Der Flächeninhalt A von $\vec{f}(Q)$ ist gegeben durch

$$A = \iiint\limits_{\vec{f}(Q)} 1 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint\limits_{Q} (ku + mv + nw)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$$

für Konstanten $k, m, n \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie k, m, n.

$$k = \boxed{}, \quad m = \boxed{}, \quad n = \boxed{}.$$

(b) Seien $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le x \le 1\}$ und $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Stellen Sie die Grenzen für die Integration über den Bereich G für die beiden möglichen Reihenfolgen der Variablen auf (Normalbereiche vom Typ I und II), indem Sie geeignete Ausdrücke $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in x und y angeben, sodass gilt:

$$\iint\limits_{G} g(x,y)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \Big(\int_{\alpha}^{\beta} g(x,y)\ \mathrm{d}x \Big)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \Big(\int_{\gamma}^{\delta} g(x,y)\ \mathrm{d}y \Big)\,\mathrm{d}x.$$

$$\alpha = \boxed{}, \quad \beta = \boxed{}, \quad \gamma = \boxed{}, \quad \delta = \boxed{}.$$

(c) Sei $Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le 1,\ -1 \le z \le 1\}$ ein Zylinderabschnitt im reellen Koordinatenraum $\mathbb{R}^3$. Durch Übergang zu Zylinderkoordinaten bei der Koordinatentransformation erhalten wir für geeignete Zahlen $A, B \in \mathbb{R}$ mit $B \ge 0$:

$$\iiint\limits_{Z} (x+y)^2\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{-1}^{1} \Big(\int_0^{2\pi} \Big(\int_0^1 \rho^A z^B (1 + 2\cos(\varphi)\sin(\varphi))\,\mathrm{d}\rho \Big)\,\mathrm{d}\varphi \Big)\,\mathrm{d}z$$

Berechnen Sie die Zahlen A, B:

$$A = \boxed{}, \qquad B = \boxed{}.$$

(d) Es bezeichne P das Parallelogramm mit Ecken $(0,0), (2,-1), (2,2), (0,3)$. Durch die Abbildung $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

wird das Einheitsquadrat auf das Parallelogramm P abgebildet. Damit gilt für das Integral

$$\iint\limits_{P} \left(2x^2 + 4y^3\right)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^1 \Big(2\big(x(u,v)\big)^2 + 4(y(u,v))^3\Big) \cdot a\ \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

für $a \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$y(u,v) = \boxed{}, \quad a = \boxed{}.$$

10. **Aufgabe (Integralsätze)** **(6 Punkte)**

(a) Sei $K \subset \mathbb{R}^3$ eine Kugel mit beliebigem Mittelpunkt $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$ und beliebigem Radius $R > 0$. Im Folgenden sei ∂K so parametrisiert, dass das Oberflächenelement nach außen zeigt. Sei

$$\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{v}(x,y,z) = \begin{bmatrix} xyz + x^2 \\ -3y^2 z \\ z - 3xz \end{bmatrix}.$$

Dann gilt

$$\iint_{\partial K} \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}O} = \iiint_K (Ax + Byz + 1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

für Konstanten $A, B \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie A und B.

$$A = \boxed{}, \quad B = \boxed{}.$$

(b) Betrachten Sie das Vektorfeld $\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, gegeben durch

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{bmatrix} (x-1)y \\ 4z(x-1) \\ 2y + z^4 \end{bmatrix}.$$

Die Fläche $S \subseteq \mathbb{R}^3$ im Raum sei eine Einheitskreisscheibe in der x-y-Ebene, parametrisiert durch die Abbildung

$$\vec{x}\colon [0,1] \times [0,2\pi] \to S,\ (r,\varphi) \mapsto \begin{bmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Der Rand ∂S von S sei durch $\vec{\gamma}\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{bmatrix}$ parametrisiert.
Das Oberflächenelement der Parametrisierung von S ist gegeben durch

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial r}(r,\varphi) \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi}(r,\varphi) = \begin{bmatrix} 0 \\ \kappa \\ r \end{bmatrix},$$

für eine Konstante $\kappa \in \mathbb{R}$, und es gilt

$$\int_{\vec{\gamma}} \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s} = a \cdot \iint_S \begin{bmatrix} 6 - 4x \\ 0 \\ 4z - x + b \end{bmatrix} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}O} = abc$$

für Konstanten $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $|a| = 1$ und $b > 0$.
Berechnen Sie κ, a, b, c:

$$\kappa = \boxed{}, \quad a = \boxed{}, \quad b = \boxed{}, \quad c = \boxed{}.$$